Série A, n° 4482
N° d'ordre
5330

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean PORTE

1re **THÈSE.** — Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs.

2e **THÈSE.** — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 7 mai 1965 devant la Commission d'examen.

MM. R. de POSSEL *Président.*
P. SAMUEL, G. KREISEL *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins
—
1965

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534905_0004

Série A, n° 4482
N° d'ordre
5330

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Jean PORTE

1re **THÈSE.** — Recherches sur la théorie générale des systèmes formels et sur les systèmes connectifs.

2e **THÈSE.** — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 7 mai 1965 devant la Commission d'examen.

MM. R. de POSSEL *Président.*
P. SAMUEL, G. KREISEL *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
55, quai des Grands-Augustins
—
1965

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

BRELOT	T	Analyse supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des Etres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralogie et cristallographie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) et Sédimentation (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS (R.)	T	Recherches physiques.
THOMAS (A.)	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et Diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J. P. MATHIEU	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie.
CHOQUET	T	Théorie des Fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Technique aéronaut.).
NORMANT	T	Synthèse organique.
BÉNARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ	T	Statistique mathématique.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
LELONG	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparée.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie.
DODEMENT	T	Mathématiques (M. G. P.).
PISOT	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	m	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PANNETIER	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des Fluides (I).
LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques II (E. N. S.).
BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE	T	Physique Électricité.

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

DUBOIS (J. E.)	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL (A.)	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie végétale.
CASTAING	T	Physique II Thermodynamique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).
Mme CHARNIAUX-COTTON	T	Évolution des Êtres organisés.
POSSOMPÈS	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
TONNELAT	T	Biologie physicochimique (Orsay).
VILLE	T	Économétrie.
WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMAN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biologie végét. S. P. C. N. (Orsay).
ROLIET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et Théorie des Groupes.
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des Particules fondamentales (Orsay .
BRICARD	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay).
M. JULIA	T	Études des Mol. complexes.
LENDER	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimie des Radioéléments.
Mlle QUINTIN	T	Électrochimie.
MONOD	T	Chimie du Métabolisme.
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Écologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie M. P. C. (Orsay).
CHATELET	T	Chimie (P. C. B.).
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Électronique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLEMBERGER	T	Géologie des grandes régions du Globe (Orsay).
FRANC	T	Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL		Botanique tropicale.
STLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT		Géophysique ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE (D.)		Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN		Physique Électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT		Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET		Mécanique des fluides.
CORABŒUF	T	Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE	T	Physique de l'Exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale (P. C. B.).
JULLIEN (J.)		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathématique de la Physique (Orsay).
OLIVIER		Antropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique E. N. S. (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques E. N. S. féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELÈS		Physique (S. P. C. N.).
AMAT	T	Physique (P. C. B.).
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
BRUHAT	T	Mathématiques M. P. C.
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique M. G. P. (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématique propédeutique.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVÈS		Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT		Physique (C. U. S. Orléans).
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P. C. B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des Fluides.
ROUBINE		Électronique.
SILBER	T	Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NÉRON	T	Mathématiques M. P. C. (Orsay).
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M. P. C.).
LE CORRE	T	Électricité.

DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des Hautes-Énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Physique expér. des Hautes-Énergies (Orsay).
NATAF	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
ÉCHALIER		Biologie animale (P. C. B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie structurale et Géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (Agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U. Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématique propéd. (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
PEREZ Y JORBA		Physique expér. des Hautes-Énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (Agrégation Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Mathématique (M. P. C.).
MOREL PIERRE		Physique (M. P. C.).
ARSAC		Programmation.
LEFÈBVRE		Chimie (M. P. C.).
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique (C. P. E. M.).
RIO		Chimie (C. P. E. M.).
JAUZEIN		Géologie (E. N. S.).
PRÉVOST (Georges)		B. V. (C. P. E. M.).
FAVARD (P.)		B. A. (C. P. E. M.).
VILKAS		Chimie (C. P. E. M.).
Mlle FICINI		Chimie (C. P. E. M.).
LEQUEUX		Astronomie
COHEN TANNOUDJI		Physique (M. P. C.).
TAVERNIER		Physique (C. P. E. M.).
Mme ROIZEN		Physique (C. P. E. M.).
DURAND (M.)		B. A. (S. P. C. N.).
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		B. A. (C. P. E. N.).
BROUSSE		Géologie (Orsay).
CAGNIAC		Physique Agrégation (Orsay).
LEBERRE		Zoologie (Orsay).
SCHEFFER		Microbiologie (Orsay).
DE GENNES		Physique des Solides (Orsay).
RIOU		Physique nucléaire expérimentale (Orsay).
CLAUSER		Chimie biologique (Orsay).
CHEVALIER		Physiologie animale (Orsay).
JANCOVICI		Physique atomique (Orsay).
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire (Orsay).
FÉTIZON		Chimie propédeutique (Orsay).
CERF		Mathématiques (Orsay).

Secrétaire général..... R. POULAIN

AVERTISSEMENT

Le travail présent se divise de façon naturelle en *deux parties et 14 chapitres* : une première partie (chapitres 1 à 8) se rapporte à la « Théorie générale des systèmes formels » (les chapitres 1 et 2 constituant, en fait, une « Introduction ») et la deuxième partie (chapitres 9 à 14) se rapporte aux « systèmes connectifs », c'est-à-dire à des questions plus spéciales.

Indépendamment de cette division en chapitres, j'utiliserai une division en *paragraphes* (en abrégé : « § »; au pluriel : « §§ »), numérotés de 1 à 42 — cela essentiellement pour faciliter les références internes. Ainsi les références indiqueront toujours des paragraphes, jamais des pages. Trois numérotations distinctes utiliseront la numérotation des paragraphes : celles qui concernent respectivement les « définitions », les « théorèmes » et les « notes » (situées au bas des pages); chacune de ces numérotations comprend deux nombres, le premier étant le numéro du paragraphe et le second un numéro d'ordre à l'intérieur du paragraphe. Par exemple, la « Définition 11.2 » est la 2e définition du paragraphe 11, le « Théorème 12.2 » est le 2e théorème du paragraphe 12 et la « note ($^{3.2}$) » est la 2e note du paragraphe 3.

Pour la facilité des *références internes*, tous les résultats énoncés et numérotés (qu'il s'agisse de résultats nouveaux ou de rappels de résultats classiques) seront appelés « Théorèmes » quelle que soit leur importance (autrement dit, je ne distinguerai pas les « Théorèmes » des « Propositions », ni des « Lemmes », ni des « Corollaires »).

Seront numérotés à part les « *problèmes* » *non résolus* sur lesquels j'ai jugé utile d'attirer l'attention des lecteurs éventuels — ainsi le « problème 2 » est le 2e des problèmes laissés ouverts que j'ai jugé utile de numéroter —. Enfin, les propositions que j'ai jugé utile de numéroter au cours d'un raisonnement, ont été numérotées (1), (2), etc. à l'intérieur de chaque paragraphe (ou quelquefois, simplement, à l'intérieur de la démonstration d'un théorème).

Les *références à la littérature* sont indiquées par le nom de l'auteur (ou les noms des auteurs) suivi de l'année de publication et, éventuel-

lement, d'une lettre destinée à distinguer les différents mémoires d'un même auteur publiés la même année et utilisés dans le travail présent; par exemple « TARSKI 1930.*b* » signifie « le deuxième mémoire de Tarski publié en 1930 et utilisé dans le travail présent » — ces indications renvoient à la liste de « Références » située à la fin du travail présent.

La liste de « Références » en question n'est pas une bibliographie du sujet et elle n'indique que les livres ou articles effectivement utilisés pour la préparation et la rédaction du travail présent.

En vue de donner au travail présent une certaine unité, il m'a paru nécessaire de reproduire des définitions et des résultats déjà connus (et même quelquefois « classiques »); de toutes façons, il était nécessaire d'énoncer de nouveau les définitions qui diffèrent légèrement (quand ce ne serait que par le vocabulaire et les notations) des définitions classiques. Les théorèmes classiques utiles à la suite du travail seront énoncés et numérotés, mais leur démonstration ne sera donnée que si elle est très courte ou si je propose une démonstration nouvelle d'un résultat « classique ».

Il est possible que certaines définitions ou certains théorèmes que j'ai cru nouveaux se trouvent déjà dans la littérature — soit dans des mémoires que je n'ai pas lus, soit dans des mémoires que j'ai lus et ensuite oubliés ! Je m'en excuse par avance auprès des auteurs et des lecteurs éventuels.

Abréviations d'usage général qui pourront être utilisées dans le travail présent :

§	(au pluriel : §§)	= paragraphe(s)
p.	(» pp.)	= page(s)
Ch.	(» Chs)	= chapitre(s)
Déf.	(» Défs)	= définition(s)
Thm.	(» Thms)	= théorème(s)
Prop.	(» Props)	= proposition(s) (voir note (7.6))
s.	(» ss.)	= suivant(s) ou suivantes (surtout pour les §§ ou les pp.)
p. ex.		= par exemple
respect.		= respectivement
C. R.		= Comptes Rendus
C. R. A. S.		= Comptes Rendus de l'Académie des Sciences

RECHERCHES SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES FORMELS ET SUR LES SYSTÈMES CONNECTIFS

CHAPITRE 1.

BUT DU TRAVAIL PRÉSENT.

1. Généralités.

La plus grande partie de la logique mathématique contemporaine consiste en études de divers « systèmes formels ». Le travail présent a pour but de préciser, et quelquefois de généraliser, certaines des notions les plus générales utilisées (implicitement ou explicitement) par les logiciens contemporains.

Les notions utilisées ici étant très générales, il y aura peu de théorèmes forts. Mais certains résultats classiques, démontrés dans la littérature pour divers « systèmes formels » particuliers, seront obtenus ici comme conséquences faciles des mêmes définitions générales. Enfin, les définitions générales et les résultats qui en découlent seront plus clairs lorsqu'ils seront isolés, débarrassés des particularités propres de tel ou tel « système formel ». Une telle entreprise de généralisation est justifiée lorsqu'elle conduit à des méthodes nouvelles : or, on verra qu'elle m'a conduit, d'une part, à donner des définitions précises de diverses notions, utilisées dans les travaux des logiciens contemporains, mais peu étudiées pour elles-mêmes — et cela aboutit parfois à des résultats faciles à démontrer à partir des définitions générales, mais d'apparence surpre-

nante ([1.1]). D'autre part, j'ai été amené à énoncer (et parfois à résoudre) des problèmes généraux dont je ne connais pas l'équivalent dans la littérature ([1.2]).

2. Fondement des mathématiques ou branche particulière des mathématiques ?

Beaucoup considèrent la logique mathématique comme l'étude du problème philosophique dit du « fondement des mathématiques ». Ce fameux problème ne sera pas étudié; je ne discuterai même pas la question de savoir si ce problème philosophique a un sens scientifique ou n'en a pas.

Les « systèmes formels » considérés ici seront certaines structures mathématiques ([2.1]), ni plus ni moins « fondamentales » que la classe des structures algébriques, par exemple. En fait, je définirai *trois classes* de structures mathématiques : les « systèmes logistiques », les « systèmes déductionnels » et les « systèmes thétiques » (voir Chs 3, 4 et 5) et l'expression « *systèmes formels* » désignera la réunion de ces trois classes. Il faut remarquer que ces trois classes de structures ont déjà été définies dans la littérature, mais souvent de façon peu précise, surtout en ce qui concerne la distinction entre ces trois classes de structures ([2.2]). D'autre part, mes résultats les plus intéressants proviennent de l'étude des rapports entre ces trois classes de systèmes formels (étude qui n'avait jamais été faite, à ma connaissance).

La théorie des systèmes formels est ainsi une branche particulière des mathématiques pures ([2.3]).

Les « systèmes connectifs » sont une classe particulière de systèmes formels (logistiques, déductionnels et thétiques) possédant certaines particularités qui en font des généralisations du calcul propositionnel classique ([2.4]). En fait, même dans la première partie du travail présent,

---

([1.1]) Voir en particulier la distinction entre les deux sortes d' « indépendances » pour les règles de déduction (§ 19), et les pièges qui attendent le logicien qui veut « changer de notions primitives » (Ch. 12).

([1.2]) Pour les problèmes ouverts, voir en particulier §§ 27 et 31.

([2.1]) Le mot « structure » est pris ici dans un sens voisin de celui que lui donne Bourbaki, mais légèrement différent (voir § 10).

([2.2]) Cette imprécision est d'ailleurs due en grande partie à l'absence d'un vocabulaire précis pour désigner les notions dont on parle.

([2.3]) Si l'on voulait insérer cette théorie dans les *Éléments de Mathématiques* de Bourbaki, ce serait facile, à condition de la placer en « Livre I *bis* » (après la Théorie des ensembles) ou, peut-être mieux en « Livre II *bis* » (entre l'Algèbre et la Topologie générale). Le seul fragment des *Éléments* de Bourbaki qui traite (très partiellement) de la théorie des systèmes formels, est une partie de l'Appendice au Chapitre I du Livre I (voir Bourbaki 1954, Ch. 1, Appendice, §§ 1, 2 et 3).

([2.4]) Dans la mesure où ces systèmes ont été étudiés dans la littérature de façon assez générale, les auteurs les ont appelés « calculs propositionnels » (en anglais

les exemples de systèmes formels utilisés sont le plus souvent des calculs connectifs (voir p. ex. Thms 18.2, 20.4, etc.).

3. **Mathématique ou métamathématique ?**

La logique mathématique moderne est née de l'étude par des méthodes mathématiques du raisonnement mathématique lui-même; et l'on peut soutenir que l'ensemble des mathématiques actuellement existantes constitue le développement d'un système logistique particulier. Mais, dans la théorie des systèmes formels on est amené à étudier un grand nombre d'autres systèmes; certains de ces systèmes peuvent représenter abstraitement certains aspects (ou certaines parties) du raisonnement mathématique (je dirai que ce sont des êtres mathématiques *adéquats* aux raisonnements concrets qu'ils peuvent représenter) ([3.1]); d'autres systèmes sont adéquats à des méthodes de calcul plutôt qu'à des raisonnements; d'autres systèmes enfin (c'est même le cas général), ne sont adéquats à rien de concret — quelques-uns de ceux-ci seront définis explicitement et étudiés avec quelque détail, par exemple pour servir de contre-exemple dans la démonstration de divers théorèmes généraux — mais la plupart des systèmes formels englobés dans les définitions générales n'ont (jusqu'à maintenant) aucune utilité ([3.2]).

La théorie des systèmes formels est quelquefois appelée « métamathématique » ([3.3]) (voir p. ex. KLEENE 1952) par les auteurs qui s'intéressent surtout aux systèmes formels plus ou moins adéquats à certains aspects du raisonnement mathématique. J'éviterai avec soin l'usage de ce mot qui risque de suggérer des idées fausses : en réalité, le rapport entre la « mathématique » et « la métamathématique » n'a rien de commun avec le rapport entre « la physique » et « la métaphysique ». De plus, le travail présent ne porte pas spécialement sur les systèmes formels adéquats à des raisonnements mathématiques.

On peut dire que la théorie des systèmes formels, telle qu'elle est étudiée ici, est une partie spécialisée de l' « analyse combinatoire » : il s'agit de l'étude de certaines classes d'arrangements avec répétitions.

« propositional calculi » ou « sentential calculi » : voir p. ex. HARROP 1958 ou ŁOS-SUSZKO 1958).

([3.1]) C'est le cas, en particulier, des différents systèmes formels appelés « formulations du calcul propositionnel classique », voir Ch. 13.

([3.2]) De la même façon, en topologie générale, on étudie des « espaces » adéquats à l'espace physique ou à des fragments de l'espace physique (par exemple les espaces euclidiens à trois ou à deux dimensions), mais on étudie aussi beaucoup d'autres espaces.

([3.3]) Il semble que ce mot (ou plutôt le mot allemand « Metamathematik ») ait été inventé par Hilbert.

4. Syntaxe et sémantique.

Les considérations qui précèdent ne s'appliquent immédiatement qu'à la partie de la logique mathématique moderne qu'il est convenu d'appeler « *syntaxe* ». Par opposition, on appelle « *sémantique* » l'étude des rapports entre les systèmes formels « qui signifient quelque chose » et « ce qu'ils signifient » — autrement dit, l'étude de l'adéquation entre certains systèmes formels et certains raisonnements mathématiques. Mais cette étude a été mise sous une forme assez abstraite (voir p. ex. KEMENY 1948, suivi par beaucoup d'autres auteurs), pour que les considérations générales sur la syntaxe s'appliquent également à la sémantique. On peut dire qu'on appelle « syntaxe » l'étude des systèmes formels en eux-mêmes et « sémantique » l'étude des rapports entre les systèmes formels et d'autres structures mathématiques. Il n'y a pratiquement pas de mémoires consacrés à la « syntaxe pure » ni à la « sémantique pure », mais des études « plutôt syntactiques » et des études « plutôt sémantiques ». Le travail présent est « plutôt syntactique »; cependant, tout ce qui concerne les rapports entre les systèmes connectifs et leurs « évaluantes » (voir Chs 11 et ss.) est sémantique.

Qu'elle soit syntactique ou sémantique, ou les deux, la théorie des systèmes formels reste une branche des mathématiques pures. Dans le travail présent j'utiliserai donc tous les moyens de raisonner que les mathématiciens se donnent généralement le droit d'utiliser ([4.1]) (y compris par exemple, éventuellement, le « principe du tiers exclu », l' « axiome du choix » ou la « classe de tous les nombres ordinaux transfinis »). Si le lecteur tient à préciser davantage, il pourra considérer le travail présent comme un chapitre de la théorie des ensembles de Bernays modifiée par Gödel (voir GÖDEL 1940) ([4.2]).

5. Originalité du travail présent.

Environ un tiers de ce travail consiste en rappels de définitions et de résultats déjà connus (et même classiques); ces rappels étaient nécessaires, d'une part pour la continuité du texte, d'autre part (et surtout) pour préciser le vocabulaire et les notations. Un autre tiers consiste en notions et problèmes déjà évoqués dans la littérature mais ici « rénovés », c'est-à-dire présentés de façons plus générales, plus simples ou plus précises. Le dernier tiers consiste en notions et en résultats nouveaux ([5.1]).

([4.1]) En cela, je ne fais que suivre l'exemple donné par des logiciens célèbres, en particulier Tarski.

([4.2]) Personnellement, je ne connais aucun exposé de mathématique pure qui ne puisse pas être considéré comme un chapitre de la théorie des ensembles de Bernays-Gödel, ou d'une extension assez simple de cette théorie.

([5.1]) Certains de ces résultats ont été déjà annoncés dans des résumés publiés, soit pour des Congrès ou Colloques, soit sous forme de Notes à l'Académie des Sciences.

Parmi les notions et les résultats nouveaux (ou « rénovés » de façon importante), l'attention du lecteur est attirée sur les points suivants :

— Distinction des deux sortes d' « indépendances » pour les règles de déduction (voir Ch. 6).

— Treillis des déductibilités compatibles avec un même système thétique (voir Ch. 6). Treillis des déductibilités qui sont des extensions d'une même déductibilité (voir Ch. 6).

— Congruences des systèmes connectifs : treillis des congruences; congruences déterminées connectivement (voir Ch. 8).

— Calcul propositionnel classique : systèmes simples où la règle de détachement n'est pas valable; système avec déductibilité très faible; méthode de construction d'évaluantes où telle ou telle règle n'est pas valable (voir Ch. 13).

— Calculs modaux : étude d'un système très faible (voir Ch. 14).

— Définition syntactique précise de l' « équipollence » entre deux systèmes connectifs, de la « définition formelle » des connecteurs, et applications au calcul propositionnel classique et au caldul propositionnel intuitionniste (Voir Chs 12, 13 et 14).

CHAPITRE 2.

VOCABULAIRE ET NOTATIONS.

6. Généralités.

Pour tout ce qui concerne les notions mathématiques générales (c'est-à-dire non spéciales à la logique), le vocabulaire et les notations sont ceux de Bourbaki, sauf mention expresse du contraire (voir surtout le chapitre présent).

Pour ce qui concerne le vocabulaire et les notations se rapportant spécialement à la théorie des systèmes formels (ou à divers systèmes formels particuliers), les définitions seront données au fur et à mesure des nécessités de l'exposé.

7. Duplication des notions « logiques ».

Comme certains systèmes formels sont plus ou moins adéquats au raisonnement mathématique lui-même et comme il est *quelquefois* utile au cours d'un raisonnement de parler de ce raisonnement lui-même, il s'ensuit qu'il est *nécessaire* de distinguer (dans le vocabulaire et les notations), d'une part les notations relatives aux raisonnements concrets et, d'autre part, les abstractions qui les représentent dans les systèmes formels adéquats ([7.1]). D'autre part, il est commode de remplacer des expressions françaises complexes, telles que « si... alors... » (implication concrète), « si et seulement si... » (double-implication concrète) ([7.2]), « pour tout... tel que... » (quanteur universel concret), « il existe au moins un... tel que... » (quanteur existentiel concret) ([7.3]), par des

([7.1]) Si l'on considère les mathématiques comme le développement d'un système formel, cela revient à dire qu'il faut distinguer le système formel qu'on utilise des systèmes formels dont on parle.

([7.2]) La double-implication (concrète ou formelle) est souvent appelée « équivalence », ce qui peut induire en erreur, puisque ni la double-implication concrète ni la double-implication formelle ne sont des relations. L'expression « double-implication » est lourde mais je ne connais pas de mot acceptable pour la remplacer.

([7.3]) Les quanteurs (en allemand « Quantoren ») sont également appelés quantifieurs (en anglais « quantifiers ») ou encore « quantificateurs ». Le mot « quanteur » a été introduit en français par R. Fraïssé. Il est préférable d'utiliser ce mot plus court pour désigner une notion d'emploi très fréquent.

signes conventionnels; mais alors il faudra distinguer ces signes conventionnels de ceux qui sont utilisés pour représenter les « symboles » (voir Ch. 13 en particulier) abstraits, correspondant à ces notions, dans des systèmes formels adéquats ([7.4]).

Les « doublets » ainsi créés et qui pourront être utilisés dans le travail présent sont résumés dans le tableau suivant :

Notions concrètes.	Notions abstraites.	Remarques.
Signe ([7.5])	Symbole ([7.6])	
Proposition	Formule ([7.6])	
Théorème	Thèse ([7.7])	
Postulat	Axiome	
Définition	Définition formelle ([7.8])	
$=$	$\asymp$	C'est l'égalité (ou identité) ([7.9])
$\wedge$	$\&$	Conjonction
$\vee$	$\sqcup$	Disjonction
$\neg$	$\sqsubset$	Négation
$\Rightarrow$	$\supset$	Implication
$\Leftrightarrow$	$\#$	Double-implication
$\forall$	$\mathbf{\forall}$	Quanteur universel
$\exists$	$\mathbf{\exists}$	Quanteur existentiel

Les *guillemets* sont utilisés et (en fait, ils ont déjà été utilisés ci-dessus) pour *désigner* des signes typographiques (ou des suites de signes). Par exemple, le signe « $\supset$ » *désigne* le symbole (voir Ch. 13) $\supset$, par contre $\supset$

([7.4]) Ce qui est conforme au principe énoncé plus haut : distinguer entre ce dont on se sert et ce dont on parle (voir CHURCH 1956, § 08).

([7.5]) Ou encore « signe typographique » si je veux insister sur le caractère concret des signes.

([7.6]) Ainsi, les mots « symbole » et « formule » sont spécialisés par rapport à l'usage ordinaire. Ils n'auront plus maintenant que le sens que leur donneront les définitions 11.1, 14.1 et 16.1. Ce qu'on appelle généralement des « formules », c'est-à-dire des propositions écrites en se servant uniquement de signes conventionnels, seront appelées simplement des « propositions ».

([7.7]) Beaucoup d'auteurs (en particulier ceux qui appellent « métamathématique » la théorie des systèmes formels) appellent « métathéorèmes » ce que j'appelle « théorèmes », et « théorèmes » ce que j'appelle « thèses ».

([7.8]) Au sens du paragraphe 23 ci-dessous.

([7.9]) Le signe « $=$ » signifie que ce qui est à gauche désigne la même chose que ce qui est à droite; il importe peu que ce fait soit une définition ou résulte d'un raisonnement; je n'ai donc pas suivi les auteurs qui utilisent des signes spéciaux pour indiquer l'égalité posée en définition. *L'égalité formelle* est un symbole de certains systèmes formels, qui a des propriétés plus ou moins adéquates à la propriété fondamentale du signe « $=$ ».

n'est pas un signe typographique mais *est* un être abstrait et il ne désigne rien. D'autre part, en sémantique abstraite, j'établirai de plus un rapport entre le symbole $\supset$ et une fonction $\supset^*$ et je dirai que $\supset$ *dénote* $\supset^*$ ([7.10]).

Un symbole peut être désigné par un assemblage de plusieurs signes typographiques. Par exemple, dans le « calcul propositionnel classique », tel qu'il est défini au Chapitre 13, « p_1 » désigne le symbole p_1, p_1 est un symbole unique bien que p_1 soit composé de deux signes typographiques ([7.11]), ([7.12]).

8. Théorie des ensembles.

Les notions utilisées étant celles de Gödel 1940 (et non celles des « *Éléments...* » de Bourbaki), les mots « *classe* » et « *ensemble* » ne sont pas synonymes. Je rappelle que tout ensemble est une classe, mais que certaines classes ne sont pas des ensembles (en particulier la classe de tous les ensembles ou encore la classe de tous les nombres ordinaux).

Je supposerai connus les éléments de la théorie des *nombres ordinaux transfinis* ([8.1]).

L'*inclusion* entre deux ensembles sera désignée par le signe « $\subseteq$ » (tandis que Bourbaki écrit « $\subset$ »). La notation « $\supseteq$ » sera utilisée éventuellement pour désigner « l'inclusion converse », c'est-à-dire que

$$E \supseteq F \iff F \subseteq E \quad ([8.2]).$$

L'*ensemble des parties* de l'ensemble (ou de la classe) E est désigné par « $\mathfrak{P}(E)$ » (notation de Bourbaki), ou indifféremment, « $\mathfrak{P}E$ » (en supprimant les parenthèses dont l'utilité n'est pas toujours évidente). L'ensemble des *parties finies* d'un ensemble E sera désigné par « $\mathfrak{P}_f(E)$ » ou « $P_{\aleph_0}(E)$ ».

([7.10]) De même, le chiffre « 1 », qui est un signe typographique, désigne le nombre 1 ; celui-ci est un être mathématique abstrait qui ne désigne rien. Pour la sémantique abstraite, voir Ch. 11.

([7.11]) De même, en arithmétique élémentaire, « 10 » (qui est une suite de deux signes) désigne un seul nombre.

([7.12]) Ce point de vue abstrait (où les symboles sont aux signes typographiques ce que par exemple les points d'un espace topologique sont à des taches faites sur du papier) permet d'éviter les « symboles autonymes », qui sont sensés se désigner eux-mêmes (voir p. ex. Church 1956, § 08), aussi bien que les « coins de Quine » (voir p. ex. Quine 1951, § 6). Quelques abus de langage très naturels (voir § 9) permettent de retrouver les notations usuelles des logiciens tout en conservant la même rigueur que dans les autres branches des mathématiques pures.

([8.1]) Voir p. ex. Sierpinski 1928. Dans Gödel 1940, Ch. 3, on trouvera une définition différente des nombres ordinaux; mais ces deux notions sont équivalentes pour l'usage qui en sera fait ici.

([8.2]) Remarquer que le signe « $\supset$ » sera utilisé pour désigner l'implication du calcul propositionnel classique (voir Ch. 13), ou un symbole ayant des propriétés analogues dans divers systèmes formels.

Lorsqu'il existe un ensemble E, satisfaisant à certaines propriétés, et tel que, pour tout ensemble E′ satisfaisant aux mêmes propriétés, on ait $E \subseteq E'$ (respect. $E' \subseteq E$), E sera dit « *le plus petit ensemble* » (respect. « le *plus grand ensemble* ») satisfaisant aux propriétés en question.

L'ensemble des valeurs prises par la fonction f pour des arguments satisfaisant à la propriété P sera représenté par $\{ fx \mid Px \}_x$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, par $\{ fx \mid Px \}$.

Quand la fonction f se réduit à l'identité, j'utiliserai la notation de Russell (voir WHITEHEAD-RUSSELL 1910) :

$$\hat{x}(Px) = \{ x \mid Px \}_x.$$

Quand la propriété P se réduit à l'appartenance à une classe (on a un ensemble) E, j'utiliserai aussi la notation suivante :

$$\{ \}_{x \in E} fx = \{ fx \mid x \in E \}_x$$

qui se réduit elle-même à « $\{ \}_x fx$ », ou même à « $\{ \} fx$ » s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

9. Paires et suites.

J'appellerai « paire » ([9.1]) des éléments x et y, l'ensemble

$$[x, y] = \{ \{ x \}, \{ x, y \} \}.$$

Cette notion est due à Kuratowski ([9.2]), mais la notation utilisée ici (crochets gras) est nouvelle et d'ailleurs provisoire (je ne l'emploierai plus après le paragraphe 10).

J'appelle « *suite* » tout ensemble de paires, tel que l'ensemble des premiers éléments de chaque paire constitue une section commençante de la classe des ordinaux non nuls (c'est-à-dire l'ensemble des ordinaux inférieurs à un ordinal donné $\alpha > 0$) et que deux paires d'une suite n'aient jamais le même ordinal comme premier élément. Ces ordinaux sont dits les *rangs* (dans la suite donnée) des seconds membres de chaque paire. Les seconds membres de ces paires seront dits les « *termes* » de la suite : ainsi dans la suite $\langle x, y, x \rangle$, x est le terme de rang 1 ; c'est aussi le terme de rang 3 de la même suite. Je dirai aussi « *n-ième terme* » pour désigner le terme de rang n d'une suite ([9.3]). La suite est « *finie* » si α

([9.1]) Je ne dis pas « paire ordonnée », car si $x = y$ on a $[x, y] = \{\{x\}\}$ et l'on ne peut plus parler d' « ordre » entre x et y.

([9.2]) Voir p. ex. QUINE 1951.

([9.3]) Certains auteurs, en particulier D. Lacombe, appellent « suite » tout ensemble de paires dont les premiers éléments sont les premiers nombres naturels (0 compris), en nombre fini. Lacombe appelle « n-ième figure » d'une telle famille ce qui correspond au $(n + 1)$-ième terme d'une suite finie au sens défini ici.

est un ordinal fini. Pour représenter les suites, j'utiliserai les crochets généralement employés pour représenter les paires et leur généralisation ([9.4]). Ainsi des exemples de suites sont :

$$\langle x, y \rangle = \{ [1, x], [2, y] \},$$
$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots \rangle = \{ [1, x_1], [2, x_2], \ldots, [i, x_i], \ldots \}$$

(la première suite est finie, la seconde est infinie). Les notations suivantes seront également employées (« f » désignant une fonction)

$$\langle x_i \rangle_{i<\alpha} = \langle x_1, \ldots, x_2, \ldots \rangle \qquad (i < \alpha),$$
$$\langle fi \rangle_{i<\alpha} = \langle f_1, \ldots, f_i, \ldots \rangle \qquad (i < \alpha).$$

Ces notations se réduisent respectivement à « $\langle x_i \rangle$ » et à « $\langle fi \rangle$ » s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Les seconds éléments des paires appartenant à une suite seront dits les « *éléments* » de cette suite. Une paire $[i, x]$ appartenant à une suite sera dite une « *occurrence* » de x dans cette suite. Le nombre total des occurrences de tous les éléments d'une suite finie s'appelle la « *longueur* » de cette suite. Une suite de longueur n sera également appelée un « *n-uplet* » ([9.5]). L'ensemble vide $\emptyset$ sera considéré comme une suite finie particulière, la *suite vide* (dont la longueur est 0). Dans une suite quelconque un élément x sera dit « *précéder* » (respect. « *suivre* ») un autre élément y de la même suite, si le rang de x dans la suite donnée est inférieur (respect. supérieur) au rang de y dans la même suite.

L'opération de *concaténation* entre suites *finies* consiste à « mettre bout à bout » deux suites pour en former une autre; plus précisément, si $\Gamma = \langle x_i \rangle_{i<\alpha}$ et $\Delta = \langle y_j \rangle_{j<\beta}$ sont deux suites, le résultat de cette opération (aussi appelée la « concaténation » de Γ et de Δ) est la suite $\Theta = \langle z_k \rangle_{k<\gamma}$ où $\gamma = \alpha + \beta - 2$ et où

$$z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } 1 \leq k < \alpha, \\ y_{j-\alpha+1} & \text{si } \alpha \leq k < \beta. \end{cases}$$

Je dirai que les éléments de Δ ont été « *décalés* », ce qui signifie que leurs rangs dans Θ sont obtenus à partir de leurs rangs dans Δ par addition d'une constante (dans ce qui suit, j'emploierai aussi le mot « décaler » pour désigner la soustraction d'une constante). J'écrirai, pour désigner l'opération de concaténation,

$$\Theta = \Gamma \mathbin{\wr} \Delta.$$

La concaténation n'est pas une opération symétrique. Par exemple,

$$\langle 1, 2, 1 \rangle \mathbin{\wr} \langle 2, 2 \rangle = \langle 1, 2, 1, 2, 2 \rangle,$$

([9.4]) Voir p. ex. Gödel 1940.

([9.5]) On dit aussi « n-uple »; si $n = 2$, on dit « couple » ou « doublet »; si $n = 3$, on dit « triplet », et l'on emploie des noms construits de façon analogue pour $n = 4$ ou 5.

mais

$$\langle 2, 2 \rangle \mathbin{\wr} \langle 1, 2, 1 \rangle = \langle 2, 2, 1, 2, 1 \rangle.$$

Si Γ est une suite finie, « $\tilde{\Gamma}$ » désignera l'ensemble des éléments de Γ.

Soit E un ensemble quelconque, « $\mathfrak{S}(E)$ » désignera l'ensemble des suites finies dont les éléments appartiennent à E. Je dirai que $\mathfrak{S}(E)$ est l'ensemble des « *mots en* E » (s'il n'y a pas d'ambiguïté, les suites finies seront appelées des « mots » sans autre précision).

Soit Γ un mot, si Δ est une suite dont les éléments sont des éléments de Γ, et qui est constituée d'occurrences de ces éléments dont les rangs se suivent dans Γ, on l'appellera un « *sous-mot* » de Δ. Un ensemble d'occurrences dont les rangs se suivent dans Γ, et dont les seconds éléments sont respectivement identiques aux seconds éléments des occurrences qui constituent Δ, sera dit une « *occurrence du sous-mot* Δ *dans* Γ ». Exemple : si $\Gamma = \langle 1, 2, 1, 2, 1, 2 \rangle$ et si $\Delta = \langle 2, 1, 2 \rangle$ alors Δ a deux occurrences dans Δ, à savoir

$$A = \{[2, 2], [3, 1], [4, 2]\}$$

et

$$B = \{[4, 2], [5, 1], [6, 2]\}.$$

On remarquera que les occurrences d'un sous-mot ne sont pas en général des mots, puisque le rang de leur première occurrence peut être différent de 1. On remarquera aussi que tout mot est un sous-mot de lui-même.

Deux occurrences d'un sous-mot « *empiètent* » si leur intersection n'est pas vide (ainsi dans l'exemple ci-dessus les occurrences A et B d'un même sous-mot empiètent). Soit $\Gamma = \Delta_1 \mathbin{\wr} \Delta_2$, si Δ_1 n'est pas vide, on dira que c'est un sous-mot « *initial* » de Γ; de même si Δ_2 n'est pas vide, on dira que c'est un sous-mot « *terminal* » de Γ.

Notations pratiques. — Par abus de langage, et quand aucune confusion n'est à craindre, les crochets, les virgules et les signes désignant la concaténation seront supprimés dans les écritures qui désignent des mots. Par exemple, si C, p, q sont des éléments de l'ensemble E et si x et y sont des mots en E, j'écrirai

$$\text{« C}pq\text{ » au lieu de « } \langle \text{C}, p, q \rangle \text{ »}$$

et

$$\text{« C}xy\text{ » au lieu de « } \langle \text{C} \rangle \mathbin{\wr} x \mathbin{\wr} y \text{ ».}$$

Il faudra pourtant, dans certains cas, se rappeler que l'élément p de E est distinct du mot $\langle p \rangle$ qui appartient à $\mathfrak{S}(E)$.

Pour compléter ce qui a été dit sur la concaténation, voir Tarski 1933.*a*, § 2 (j'ai changé les notations, le signe que Tarski utilisé pour représenter la concaténation risquant de se confondre avec le signe usuel qui désigne l'intersection des deux ensembles).

A l'aide de ces abus de langage, on retrouve en pratique les notations usuelles, aussi bien en analyse combinatoire qu'en logique mathématique.

Remarques :

1° Les suites de deux éléments possèdent la propriété la plus utile des paires, c'est-à-dire qu'on a

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \quad . \quad (x = x' \text{ et } y = y').$$

Cependant, si les suites sont définies à l'aide des paires, comme plus haut, il semble préférable de ne pas identifier les suites de 2 éléments avec les paires. En effet, cette identification aurait des conséquences gênantes : par exemple, de $\langle x \rangle = \{[1, x]\}$ on tirerait, dans le cas particulier où $x = 1$, $\{\{1\}\} = \{\{\}1\}\}$ et

$$(1) \quad \{\{1\}\} \in \{\{\{1\}\}\}.$$

D'autre part, et de façon analogue, de $\langle x, y \rangle = \{[1, x], [2, y]\}$, dans le cas particulier où $x = y = 1$, on tirerait

$$(2) \quad \langle 1, 1 \rangle \in \langle 1, 1 \rangle.$$

Or, l'une et l'autre des propositions (1) et (2) seraient en contradiction avec le théorème 1.6 de Gödel 1940 ([9.6]).

2° Le vocabulaire concernant les suites n'est pas fixé. Ainsi, dans Bourbaki 1956, § 6.2, l'ensemble des indices (c'est-à-dire l'ensemble des premiers éléments des paires) peut être un ensemble quelconque d'entiers naturels. Dans Dubreil-Dubreil-Jacotin 1961, p. 108, l'ensemble des indices est nécessairement l'ensemble de tous les entiers naturels. Ici, j'ai admis que l'ensemble des indices pouvait être étendu à une section commençante de la classe des ordinaux (finis ou transfinis).

3° Les suites finies jouent un rôle fondamental en logique mathématique. Dans certains travaux, où l'on étudie des « formules infiniment longues » (voir p. ex. Scott-Tarski 1957 ou Henkin 1959), ou encore dans la théorie dite des « machines de Turing » (voir Turing 1936, Post 1936 ou encore la présentation abstraite de la même théorie dans Porte 1958), il est nécessaire de remplacer les suites finies par des suites infinies, ou encore par des ensembles de paires dont les premiers éléments ne sont pas des entiers naturels. Ces généralisations de la notion de mot ne seront pas utilisées dans le travail présent, excepté dans la définition des structures.

([9.6]) Dans d'autres théories des ensembles on admet $\exists a \vdash (a \in a)$. Voir p. ex. Quine 1951, § 22.

10. Structures, relations, algèbre.

Le paragraphe présent est consacré à quelques questions de vocabulaire et de notations, qui ne sont pas spécialement logiques (il s'agit plutôt d'algèbre et de questions voisines), mais où mes habitudes diffèrent de l'usage courant (quand il existe un usage courant), et qu'il est nécessaire de fixer avant de parler de logique mathématique proprement dite.

Je rappelle que, $E_1, \ldots, E_n$ étant des ensembles quelconques, le produit cartésien de ces ensembles, $E_1 \times \ldots \times E_n$, est l'ensemble des suites finies de longueur n telles que le k-ième terme de chacune de ces suites ($1 \leq k \leq n$) appartient à E_k. Si les ensembles $E_1, \ldots, E_n$ sont tous identiques à un certain ensemble E il est usuel d'appeler « E^n » leur produit cartésien.

On peut appeler « classe des ensembles construits sur $E_1, \ldots, E_n$ comme bases » la plus petite classe qui contient comme élément les ensembles en question, ainsi que les éléments de ces ensembles, et qui est stable pour les opérateurs $\times$ (produit cartésien) et $\mathfrak{P}$.

J'appellerai « structure de bases $E_1, \ldots, E_n$ » toute suite (finie ou transfinie) dont les éléments sont des ensembles construits sur $E_1, \ldots, E_n$ comme bases. Dans la plupart des cas les structures que je considérerai n'auront qu'une seule base (également appelée « ensemble de base »); je conviendrai toujours que l'ensemble de base est le premier terme de la structure. Cette notion est empruntée à Bourbaki 1939, mais elle en diffère légèrement : en particulier, ici, je considère des structures qui peuvent avoir une infinité de termes (on verra que cela est nécessaire : voir plus loin Thm. 14.3).

Étant donné des ensembles $E_1, \ldots, E_n$, toute partie de leur produit cartésien sera appelée une « relation ». Il arrivera souvent que ces ensembles soient identiques à un même ensemble E; je dirai alors plus précisément qu'il s'agit d'une « relation sur E^n »; dans ce cas je dirai aussi, par abus de langage, qu'on a affaire à une « relation n-aire sur E ». Les relations n-aires sur un même ensemble étant des parties d'un même ensemble, peuvent être ordonnées par inclusion : je dirai alors qu'il s'agit de « l'ordination naturelle » de ces relations; il est usuel de dire qu'une relation incluse dans une autre est « plus fine » que cette autre (avec ce vocabulaire toute relation est plus fine qu'elle-même). Ces façons de parler s'appliquent d'ailleurs aussi aux relations n-aires quelconques (c'est-à-dire aux parties du produit cartésien de n ensembles donnés).

Ce qui précède signifie que je ne distingue pas une relation de son graphe (voir p. ex. Bourbaki 1954). Mon vocabulaire, conforme à l'usage le plus général des logiciens et des algébristes, est ainsi distinct de celui de Bourbaki 1954, et aussi de celui de Fraïssé 1953 (dans ce dernier

texte on appelle « relation » ce que j'appellerai « fonction caractéristique d'une relation ») ([10.1]).

Pour exprimer que le n-uplet $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ appartient à la relation R j'écrirai « $R(x_1, \ldots, x_n)$ ». Dans le cas des relations binaires, j'écrirai indifféremment « $\langle x, y \rangle \in R$ » ou « $R(x, y)$ » ou « xRy »; dans cette dernière notation, je dirai que le signe désignant la relation est écrit « en infixe ».

Il existe des relations unaires; elles sont également appelées des « propriétés ». En logique mathématique, il arrive souvent que les relations unaires aient des propriétés spéciales qui les différencient de toutes les relations n-aires pour $n > 1$: voir plus loin Thm. 18.3.

Étant donné un ensemble E, une multirelation de base E est une structure $\langle E, R_1, \ldots \rangle$ où $R_1, \ldots$ sont des relations quelconques sur E, en nombre fini ou infini. Cette notion est empruntée à Fraïssé 1953, et a été souvent utilisée depuis.

Les relations d'équivalence sont définies de la façon usuelle, c'est-à-dire que ce sont des relations binaires, réflexives, symétriques, et transitives. Les congruences sont des relations d'équivalence particulières; on peut dire que les congruences d'une structure sont les relations d'équivalence compatibles avec cette structure; mais je n'en donnerai pas de définition générale : je les définirai au fur et à mesure des besoins pour chacune des structures que j'aurai à étudier (voir p. ex. Dubreil-Dubreil-Jacotin 1951, pp. 13 et 66). Étant donné un ensemble de relations d'équivalence ayant même base, la fermeture transitive de cet ensemble d'équivalences est la relation la plus fine qui soit une relation d'équivalence et qui soit moins fine que chacune des équivalences appartenant à l'ensemble donné : voir Riguet 1948 pour la définition générale de la fermeture transitive; la démonstration du fait que la fermeture transitive d'un ensemble de relations d'équivalence est bien une relation d'équivalence se trouve dans Dubreil 1946, Ch. 1.

J'appellerai « ordre », ou encore « relation d'ordre », ce que la plupart des auteurs actuels entendent sous ce nom, c'est-à-dire ce que les auteurs anciens appelaient « ordre partiel ». J'appellerai « chaîne » ce que beaucoup d'autres appellent également « ordre total ». Ce vocabulaire est conforme à celui de Dubreil-Dubreil-Jacotin 1961, Ch. 5. J'emploierai également les expressions « treillis » et « treillis complet » dans le même sens que Dubreil-Dubreil-Jacotin 1961, pp. 172 et ss. Dans les treillis,

---

([10.1]) Voir Fraïssé 1953 ou Fraïssé 1963. Si $\{a, b\}$ est un ensemble de deux éléments distincts, où a est considéré conventionnellement comme « positif », la fonction caractéristique de la relation n-aire R sera la fonction γ_R telle que

$$\gamma_R(x_1, \ldots, x_n) = a \iff R(x_1, \ldots, x_n)$$

et

$$\gamma_R(x_1, \ldots, x_n) = b \iff \neg R(x_1, \ldots, x_n).$$

et dans d'autres ensembles ordonnés, j'appellerai « point » ce que DUBREIL-DUBREIL-JACOTIN 1961, p. 169 appellent « point » ou « atome »; en effet, j'emploierai le mot « atome » dans un autre sens : voir Ch. 9 et ss.

Pour la notion de « pré-ordre » voir NACHBIN 1948 ou encore, par exemple, FRAÏSSÉ 1953.

On arrive souvent à construire des semi-treillis inférieurs en utilisant la propriété suivante : Si plusieurs relations satisfont à une condition de forme universelle, l'intersection de ces relations satisfait à cette même condition. Cela sera souvent utilisé dans la suite; voir p. ex. Thms 21.7 et 21.8.

Les notions d'application d'un ensemble sur ou dans un ensemble seront utilisées dans le sens usuel. Une application de E dans F (ou sur F) est dite « semi-fonctionnelle » si chaque élément de E est appliqué sur au plus un élément de F. Une relation $(n+1)$-aire ($n \geq 1$), c'est-à-dire une partie d'un ensemble-produit $E_1 \times \ldots E_n \times F$, soit R, sera dite « semi-fonctionnelle » si la relation binaire R′ définie par

$$R'(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle, y) \iff R(x_1, \ldots, x_n, y)$$

est une application semi-fonctionnelle de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans F. Je dirai aussi qu'une relation semi-fonctionnelle est une « semi-fonction » (plus exactement « une semi-fonction de $E_1, \ldots, E_n$ vers E », les noms des ensembles pouvant être omis quand aucune ambiguïté n'est à craindre), et j'écrirai

$$y = R(x_1, \ldots, x_n) \iff R(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Par abus de langage, je confondrai la semi-fonction R avec l'application correspondante. Cette convention permet de dire que « R est une application d'un certain ensemble dans un autre ensemble » au lieu de dire, comme c'est usuel, que « c'est une semi-fonction définie dans un ensemble et prenant ses valeurs dans un autre ensemble »; en effet, les mots « définie » et « valeurs » ont plusieurs sens très divers en logique mathématique.

Une fonction est une semi-fonction qui est « définie partout », c'est-à-dire, d'après l'abus de langage déjà fait, une application d'un ensemble produit dans un autre ensemble ([10.2]).

Les conventions de vocabulaire qui précèdent reviennent à confondre chaque fonction avec son graphe.

Si une relation $(n+1)$-aire est fonctionnelle, c'est une « fonction n-aire »; je dirai aussi que c'est une fonction « à n arguments »; je n'utiliserai

([10.2]) Si le contexte indique sans ambiguïté que f est une fonction unaire et que x est son argument, j'écrirai souvent « fx » à la place de la notation plus traditionnelle « $f(x)$ ».

pas l'expression usuelle de « fonction de n variables », car le mot « variable » a d'autres sens en logique mathématique.

Beaucoup d'auteurs admettent le cas $n = 0$ dans la définition des applications semi-fonctionnelles. Cela revient à admettre l'existence de fonctions à 0 arguments, lesquels sont des éléments de « l'ensemble des valeurs » (on les appelle aussi des « constantes », qu'il ne faudra pas confondre avec les « fonctions constantes » que je vais définir). Je n'adopterai pas cette convention, car elle ne serait pas particulièrement utile dans le travail présent, étant donné les propriétés spéciales des relations unaires.

Soit un ensemble E, qui sera sous-entendu, les « *fonctions projections* » sont les fonctions P_k^n, où n est le nombre des arguments et $1 \leq k \leq n$, telles que $P_k^n(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = x_k$ pour tout $x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ appartenant à E. En particulier, on a $P_1^1(x) = x$ pour toute $x \in E$; par suite P_1^1 est également appelé « *la fonction identité* ». Les fonctions K_u^n (où n est le nombre des arguments et u est un élément particulier de E) telles que $K_u^n(x_1, \ldots, x_n) = u$ pour tout $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à E, sont appelées « *fonctions constantes* ».

J'appellerai « *superpositions* » les opérations qu'on appelle souvent « substitutions » (sous-entendu dans l'expression d'une fonction); en effet, le mot « substitution » sera utilisé ici dans un autre sens; voir Déf. 24.2. Si

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$$

(pour tout $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à E), je dirai que la fonction n-aire f est définie à partir de la fonction k-aire g et des k fonctions n-aires $h_1, \ldots, h_k$ par « *superposition normale* », ou encore par « *composition* ». Si $k = 1$, le mot « composition » retrouve ainsi son sens usuel.

J'admettrai sans démonstration le résultat suivant : Si un ensemble de fonctions est stable pour les superpositions normales et s'il contient toutes les fonctions projections, alors cet ensemble de fonctions est stable pour toutes les superpositions (voir p. ex. Lacombe 1960).

Il est inutile de donner une définition particulière pour les isomorphismes : voir p. ex. Bourbaki 1957, § 1.5. Par contre, les homomorphismes seront définis de façon spéciale, chaque fois qu'il sera utile de les employer pour une structure déterminée : voir en particulier Déf. 28.8.

CHAPITRE 3.

SYSTÈMES LOGISTIQUES.

11. Notions fondamentales.

Les systèmes logistiques sont l'une des trois espèces de structures mathématiques que j'appelle « systèmes formels ».

DÉFINITION 11.1. — On appellera « *système logistique* » toute structure

$$\mathfrak{S} = \langle \mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots, \mathscr{N} \rangle,$$

dans laquelle :

1° $\mathscr{E}$, qui est l'ensemble de base, est un ensemble quelconque, dit « alphabet », ou « ensemble des symboles »;

2° $\mathscr{F}$ est une partie *quelconque* de $\mathfrak{S}(\mathscr{E})$. L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathscr{E})$ est dit « l'ensemble des *mots* » du système. $\mathscr{F}$ est dit « l'ensemble des *formules* »;

3° $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots$ sont des parties de $\mathscr{F}$ dites « *schémas d'axiomes* ». On appellera « axiome » tout élément d'un schéma d'axiomes; si $\mathscr{A}$ est l'ensemble des axiomes, on a

$$\mathscr{A} = \bigcup_i \mathscr{A}_i$$

Le nombre des schémas d'axiomes peut être nul, fini ou infini;

4° $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \ldots$ sont des relations (respect. n_1-aire, n_2-aire, etc., avec $n_1, n_2 \geq 2$) sur $\mathscr{F}$, dites « *règles de déduction primitives* » (ou simplement « règles primitives »). Le nombre des règles primitives peut être nul, fini ou infini. Une règle qui est une relation $(n+1)$-aire ($n \geq 1$) est dite « *règle à n antécédents* »; ses premiers arguments sont dits les « *antécédents* », son dernier argument est dit le « *conséquent* »;

5° $\mathscr{N}$ est une application bi-univoque de $\mathscr{E}$ sur une section commençante de la classe des ordinaux. $\mathscr{N}$ est appelée « *numérotation de l'alphabet* ». L'élément $x = \mathscr{E}_\alpha$ tel que $\mathscr{N}x = \alpha$ est dit « le α-ième symbole ».

DÉFINITION 11.2. — On appellera « *sous-formule* » d'une formule x tout sous-mot de x qui est une formule. Toute formule est une sous-formule d'elle-même. Une sous-formule y de x sera dite « *maximale* »

si toute sous-formule z de x, dont y est une sous-formule, est identique à x ou à y. Une sous-formule de x sera dite « *minimale* » si elle n'a pas de sous-formule différente d'elle-même.

DÉFINITION 11.3. — Une formule y (dans un système logistique $\mathcal{S}$) est dite « *immédiatement déductible* » (dans $\mathcal{S}$) de la suite de formules $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ si l'on a $\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\mathcal{R}$ étant l'une des règles primitives de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION 11.4. — On appelle « *déduction* » de y dans $\mathcal{S}$ à partir des *prémisses* $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ($y, x_1, \ldots, x_n$, étant des formules de $\mathcal{S}$) toute suite de formules $\langle z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_k \rangle$ telle que $z_k = y$ et que l'une au moins des trois conditions suivantes est satisfaite pour tout z_i ($1 \leq i \leq k$) :

1° z_1 est un axiome;

2° z_i est l'une des prémisses;

3° z_i est immédiatement déductible de certaines des formules qui la précèdent dans $\langle z_1, \ldots, z_k \rangle$.

DÉFINITION 11.5. — Une formule y est dite « *déductible* » (dans $\mathcal{S}$) des *prémisses* $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ s'il existe dans $\mathcal{S}$ une déduction de y à partir de ces mêmes prémisses. Cela s'écrira « $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \vdash_{\mathcal{S}} y$ » (l'indice « $\mathcal{S}$ » pouvant être supprimé si aucune ambiguïté n'est à craindre).

DÉFINITION 11.6. — Une formule x est dite une « *thèse* » du système logistique $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est déductible de l'ensemble vide de prémisses. On écrit « $\vdash_{\mathcal{S}} x$ » pour indiquer que x est une thèse du système logistique $\mathcal{S}$; si aucune ambiguïté n'est à craindre, on écrit simplement « $\vdash x$ ». Autrement dit

$$\vdash_{\mathcal{S}} x \iff \emptyset \vdash_{\mathcal{S}} x.$$

DÉFINITION 11.7. — En général, on appellera « *règle* » (non primitive) toute relation sur $\mathcal{F}$. Toute relation $(n+1)$-aire sera encore appelée une « *règle à n antécédents* », les n premiers arguments de la règle étant appelés « *les antécédents* », le dernier argument de la règle étant appelé « *le conséquent* ». Tout ensemble de formules d'un système logistique sera encore appelé un « *schéma* » (mais non plus un schéma d'axiomes). Ces notions de règle et de schéma seront encore utilisées, avec le même sens, dans les systèmes déductionnels et dans les systèmes thétiques lesquels seront définis aux Chapitres 4 et 5 ([11.1]).

THÉORÈME 11.1. — *S'il n'y a pas d'axiome, il n'y a pas non plus de thèse.* — Évident.

THÉORÈME 11.2. — *S'il n'y a pas de règle, il n'y a pas d'autre thèse que les axiomes.* — Évident.

([11.1]) Une règle à $n-1$ antécédents, c'est-à-dire une relation n-aire sur l'ensemble des formules, sera souvent appelée ici « une règle n-aire ».

12. Propriétés de la déductibilité.

THÉORÈME 12.1. — *La relation de déductibilité du système logistique* $\mathcal{S}$ *est la relation* $\mathcal{H}$ *la plus fine sur* $\mathfrak{S}(\bar{\mathcal{S}}) \times \bar{\mathcal{S}}$ *qui satisfait aux conditions suivantes* (où Γ, Δ sont des suites finies quelconques de formules et où $x_1, \ldots, x_n, y, z$, sont des formules quelconques) :

(1) $\langle x \rangle \mathcal{H} x$;

(2) $\Gamma \mathcal{H} y \Rightarrow \Gamma \mathbin{8} \langle x \rangle \mathcal{H} y$;

(3) $\Gamma \mathbin{8} \langle x, y \rangle \mathbin{8} \Delta \mathcal{H} z \Rightarrow \Gamma \mathbin{8} \langle y, x \rangle \mathbin{8} \Delta \mathcal{H} z$;

(4) $\Gamma \mathcal{H} y$ et $\Gamma \mathbin{8} \langle y \rangle \mathcal{H} z \Rightarrow \Gamma \mathcal{H} z$;

(5) $x \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{O} \mathcal{H} x$;

(6) $\mathcal{R}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \Rightarrow \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mathcal{H} y$
pour chaque règle primitive (à n antécédents quel que soit $n \geqq 1$) $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$.

En effet, d'une part, il existe une telle relation $\mathcal{H}$, à savoir la relation toujours vérifiée; et si plusieurs relations satisfont aux conditions (1)-(6), il en sera de même de leur intersection qui sera la relation la plus fine satisfaisant aux condition (1)-(6).

D'autre part, il est évident que la relation de déductibilité $\vdash_{\mathcal{S}}$, satisfait à ces conditions.

Il reste donc à démontrer que toute relation satisfaisant à (1)-(6) est moins fine que $\vdash_{\mathcal{S}}$, c'est-à-dire que, pour toute formule y et pour toute suite finie de formules Γ, on a

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y \Rightarrow \Gamma \mathcal{H} y.$$

Supposons donc que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y$, c'est-à-dire qu'il existe une déduction de y à partir de Γ, et soit $\Sigma = \langle z_1, \ldots, z_p \rangle$ cette déduction (avec $z_p = y$). On va démontrer que $\Gamma \mathcal{H} z_1$ et que si $\Gamma \mathcal{H} z_i$ pour tout $i < j$, alors $\Gamma \mathcal{H} z_j$, d'où $\Gamma \mathcal{H} z_p$, par récurrence.

Or, z_1 est, soit un axiome, soit une prémisse. Dans le premier cas, on a $\mathfrak{O} \mathcal{H} z$ par (5), d'où $\Gamma \mathcal{H} z_1$ par (2). Dans le second cas, on a $\langle z_1 \rangle \mathcal{H} z_1$ par (1), d'où $\Gamma \mathcal{H} z_1$ par (2) et (3).

Supposons qu'on ait $\Gamma \mathcal{H} z_i$, pour tout $i < j$, alors z_j doit satisfaire à l'une des conditions 1°, 2° ou 3° de la Définition 11.4. Dans les cas 1° et 2°, on démontre $\Gamma \mathcal{H} z_j$ comme ci-dessus. Dans le cas 3°, on a $\mathcal{R}_k \langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}, z_j \rangle$ où $\mathcal{R}_k$ est l'une des règles primitives de $\mathcal{S}$; n est le nombre d'antécédents de cette règle, et $i_1, i_2, \ldots, i_n < j$. On a alors successivement :

$$\langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_n} \rangle \mathcal{H} y \quad \text{par (6)},$$
$$\Gamma \mathbin{8} \langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_n} \rangle \mathcal{H} y \quad \text{par (2)},$$
$$\Gamma \mathcal{H} z_{i_n} \quad \text{par hypothèse},$$
$$\Gamma \mathbin{8} \langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-1}} \rangle \mathcal{H} z_{i_n} \quad \text{par (2)},$$

et

$$\Gamma\, \mathfrak{K}\langle z_{i_1}, \ldots, z_{i_{n-1}}\rangle \mathfrak{C}\, y \quad \text{par (4)}.$$

En répétant ce raisonnement n fois, on aboutit à $\Gamma \mathfrak{C} y$.

THÉORÈME 12.2. — *Pour toutes formules x et y et pour toute suite finie de formules Γ :*

$$\Gamma\, \mathfrak{K}\langle x, x\rangle \vdash_{\mathcal{S}} y \;\Rightarrow\; \Gamma\, \mathfrak{K}\langle x\rangle \vdash_{\mathcal{S}} y.$$

Facile à démontrer d'après les conditions (1) et (4) du Théorème 12.1.

THÉORÈME 12.3. — *Pour toutes formules $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ et pour toute suite de formules Γ on a*

$$(\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x_1 \text{ et } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x_2 \text{ et } \ldots \text{ et } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x_n \text{ et } \Gamma\, \mathfrak{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \vdash_{\mathcal{S}} y) \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y.$$

Évident par applications répétées de la condition (4) du Théorème 12.1.

REMARQUES :

1° Il résulte de ce qui précède que lorsqu'on a $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y$ la suite Γ a moins d'importance que l'ensemble des éléments qui lui appartiennent. Cependant, la considération des suites à la place des ensembles de formules facilite la construction de nouveaux systèmes formels ayant comme ensemble de base (« alphabet ») l'ensemble des formules d'un autre système formel (voir p. ex. ŁOŚ-SUSZKO 1958).

2° A la place de la relation de déductibilité $\vdash_{\mathcal{S}}$, Tarski et ses élèves utilisent la fonction « conséquence » (voir p. ex. TARSKI 1930.*a* ou TARSKI 1930.*b*). On peut définir cette fonction, que j'appellerai « $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}$ », de la façon suivante :

$$x \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\, \mathfrak{U} \;\Leftrightarrow\; \exists\, \Gamma\, (\Gamma \in \mathfrak{S}(\mathfrak{U}) \text{ et } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x).$$

Cette façon de procéder simplifie certains raisonnements et en complique d'autres. Ainsi la fonction $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}$ est une application de $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$, c'est-à-dire qu'elle est définie même si son argument est un ensemble infini de formules.

Il est facile de démontrer qu'on peut définir inversement la relation de déductibilité à partir de la fonction conséquence par

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\, \tilde{\Gamma}.$$

Il est également facile de montrer que $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\, \mathfrak{U}$ est le plus petit ensemble de formules contenant $\mathfrak{U}$ ainsi que les axiomes de $\mathcal{S}$ et fermé pour chacune des règles primitives de $\mathcal{S}$. En particulier, les conséquences de l'ensemble vide sont les thèses du système.

13. Commentaires.

1° Le chapitre présent ne contient que des définitions et des théorèmes évidents; il est destiné à préparer les chapitres suivants qui comprendront des démonstrations plus compliquées.

2° L'ensemble de base, $\mathscr{E}$, des systèmes logistiques n'a été limité en rien dans la théorie générale qui précède. La nature de ses éléments peut être quelconque : voir divers exemples explicités dans la suite du travail présent; voir aussi les cas où l'ensemble $\mathscr{E}$ est l'ensemble des formules d'un autre système formel (Gentzen 1934, Łoś-Suszko 1958, etc.). La cardinalité de $\mathscr{E}$ peut être également quelconque; dans la plupart des cas usuels, l'alphabet est dénombrable, mais il peut aussi être fini (voir p. ex. Post 1943 ou Porte 1959), ou infini non dénombrable (voir p. ex. Henkin 1949).

3° Dans la théorie générale exposée ici, les questions d'effectivité ou de récursivité ne jouent aucun rôle; pour un point de vue opposé, voir Church 1956, § 07, pp. 53-54.

4° Il existe des systèmes logistiques sans axiome, par exemple les systèmes utilisés par Gödel et par Kleene pour définir les fonctions récursives (voir Kleene 1952, § 54); historiquement, les premiers systèmes logistiques sans axiome semblent avoir été inventés par Church (voir Church 1941). Il est évident que s'il n'y a pas d'axiome, il n'y a pas non plus de thèses, mais la déductibilité peut encore être définie et posséder des propriétés non triviales. Il existe aussi des systèmes logistiques sans règle de déduction primitive; en fait, c'est le cas des systèmes thétiques, qui seront définis plus loin (Ch. 5); il est évident que dans ce cas l'ensemble des thèses est identique à l'ensemble des axiomes.

5° Les règles de déduction pourraient être définies autrement, à savoir comme des relations binaires dont l'antécédent est une famille quelconque de formules de la forme $\langle x_i \rangle_{1 \leq i < \alpha}$, α étant un ordinal quelconque (le conséquent, c'est-à-dire le deuxième argument, étant une formule). Cette définition serait plus générale que celle qui a été utilisée dans le chapitre présent, car elle permettrait d'englober les règles dites « non constructives » (voir p. ex. Rosser 1937 ou Tarski 1933).

6° Dans certains travaux, on utilise, à la place des formules, des séquences infinies de symboles; par exemple : des séquences de la forme $\langle x_i \rangle_{1 \leq i < \alpha}$ où les x_i sont des symboles et où α est un ordinal quelconque (voir p. ex. Henkin 1959); les configurations des machines de Turing peuvent être également représentées par des séquences infinies de formules de la forme $\langle x_i \rangle_{i \in Z}$ (voir p. ex. Porte 1958).

7° On appelle souvent « déductibilité » d'un système logistique une relation différente de celle qui a été définie ci-dessus (voir p. ex. MONTAGUE-HENKIN 1956); voir aussi, pour des systèmes logistiques particuliers, CHURCH 1956, § 13, ou encore KLEENE 1952, §§ 20 et 32. Ces diverses notions m'ont paru trop particulières pour être examinées dans le travail présent.

8° L'ensemble $\mathfrak{S}$ et la fonction $\mathfrak{N}$ n'ont en réalité pas été utilisées dans le chapitre présent; il en sera de même dans les Chapitres 4 et 5. On pourrait donc exposer la théorie générale des systèmes formels en prenant l'ensemble des formules $\mathfrak{F}$ comme ensemble de base; c'est d'ailleurs ce qui a été fait dans beaucoup de travaux de Tarski et de ses élèves (voir p. ex. TARSKI 1930.*a*, TARSKI 1930.*b*, ŁOŚ-SUSZKO 1958, etc.).

9° Les remarques 4°, 5° et 6° suggèrent des généralisations de la théorie dite générale exposée dans le travail présent. Je ne les ai pas utilisées car elles ne paraissent pas utiles pour l'étude des systèmes connectifs, qui sera exposée dans les Chapitres 9 et suivants. C'est pour la même raison que j'ai exposé la théorie générale des systèmes formels en prenant comme ensemble de base l'ensemble des symboles et non l'ensemble des formules.

10° Les remarques 2°, 3° et 6° sont également valables pour les systèmes déductionnels (Ch. 4) et pour les systèmes thétiques (Ch. 5). Elles ne seront pas répétées.

CHAPITRE 4.

SYSTÈMES DÉDUCTIONNELS.

14. Notions fondamentales.

DÉFINITION 14.1. — On appellera « *système déductionnel* » toute structure

$$\mathcal{S}' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle,$$

où $\mathcal{E}$ (l'ensemble de base ou « alphabet »), $\mathcal{F}$ (l'ensemble des « formules ») et $\mathcal{R}$ (la « numérotation » de l'alphabet) sont, comme dans la Définition 11.1, et où $\mathcal{H}$ est une relation sur $\mathfrak{S}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions (1), (2), (3) et (4) du Théorème 12.1.

Si Γ est une suite finie quelconque de formules et y est une formule quelconque et si $\Gamma \mathcal{H} y$, on dira encore que y est « *déductible* » de Γ dans $\mathcal{S}'$ et l'on écrira $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}'} y$ (l'indice $\mathcal{S}'$ pouvant être supprimé quand aucune ambiguïté n'est à craindre).

Si une formule y est déductible de la suite vide de formules, on dira encore que c'est une « *thèse* » de $\mathcal{S}'$, ce qui s'écrira encore « $\vdash_{\mathcal{S}'} y$» (l'indice $\mathcal{S}'$ pouvant être supprimé lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre).

On a donc comme dans le système logistique,

$$0 \vdash y \iff \vdash y.$$

THÉORÈME 14.1. — *Si $\mathcal{S}$ est un système logistique, alors la structure*

$$\mathcal{S}' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \vdash_{\mathcal{S}}, \mathcal{R} \rangle$$

(où $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ sont respectivement l'alphabet, l'ensemble des formules, et la numérotation de l'alphabet de $\mathcal{S}'$) *est un système déductionnel.* — Évident. — On dira dans ce cas que $\mathcal{S}'$ est le système déductionnel « *engendré* » par le système logistique $\mathcal{S}$, ou encore que $\mathcal{S}$ est une « *axiomatisation* » de $\mathcal{S}'$.

THÉORÈME 14.2. — *Tout système déductionnel possède au moins une axiomatisation.*

Démonstration. — Soit

$$\mathcal{S}' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle$$

un système déductionnel. Posons

$$\begin{aligned} y \in \mathfrak{A} &\iff \mathfrak{O}\,\mathfrak{Dl}\,y, \\ \mathcal{R}_1(x_1, y) &\iff \langle x_1 \rangle \mathfrak{Dl}\,y, \\ \mathcal{R}_2(x_1, x_2, y) &\iff \langle x_1, x_2 \rangle \mathfrak{Dl}\,y, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{R}_i(x_1, \ldots, x_i, y) &\iff \langle x_1, \ldots, x_i \rangle \mathfrak{Dl}\,y. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathfrak{A}, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_i, \ldots, \mathfrak{M} \rangle$$

est un système logistique qui engendre $\mathcal{S}'$. En effet, la déductibilité de $\mathcal{S}$, soit $\vdash_{\mathcal{S}}$, satisfait aux conditions (1)-(4) du Théorème 12.1, par définition et aux conditions (5) et (6) du Théorème 12.1, par construction; d'autre part, $\vdash_{\mathcal{S}}$ est bien la relation la plus fine qui satisfasse aux conditions (1)-(6) du Théorème 12.1, c'est-à-dire que

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y \quad \rightarrow \quad \Gamma\,\mathfrak{Dl}\,y$$

car si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} y$, alors, ou bien y est immédiatement déductible de certaines formules qui se trouvent antérieurement dans Γ, et dans ce cas, il n'y a qu'à utiliser les conditions (2) et (3) du Théorème 12.1, ou bien y est un axiome (même procédure), ou bien $y \in \tilde{\Gamma}$ et il n'y a qu'à utiliser les conditions (1) et (2) du Théorème 12.1.

Remarques :

1° Dans l'exemple construit pour la démonstration du Théorème 14.2, la déductibilité du système logistique est identique à sa déductibilité immédiate. Il existe des exemples bien connus de systèmes logistiques où cela ne se produit pas; j'en signalerai des exemples dans la suite du travail présent ([14.1]).

2° Le système logistique construit pour démontrer le Théorème 14.2 possède un seul schéma d'axiomes, mais une infinité de règles de déduction primitive. Ceci n'est pas toujours le cas, cependant nous avons le résultat suivant ([14.2]) :

Théorème 14.3. — *Il existe des systèmes déductionnels qui ne peuvent être engendrés que par des systèmes logistiques possédant une infinité de règles de déduction primitives.*

([14.1]) Exemple : le CPC-FL qui sera défini au paragraphe 35. On a dans ce système formel, p_1, $p_1 \supset p_2$, $p_2 \supset p_3 \sqsupset p_3$ mais la formule atomique p_3 n'est pas immédiatement déductible des trois formules dont je viens de dire qu'elle est déductible.

([14.2]) C'est à cause de ce résultat que j'ai été amené à considérer des structures constituées par une suite transfinie d'ensembles.

Il suffit d'en donner un exemple. Soit

$$\mathcal{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle$$

le système déductionnel tel que :

1° $$\mathcal{E} = \mathrm{Z};$$

2° $$x \in \mathcal{F} \iff \exists n (n \in \mathrm{Z} \wedge x = \langle n \rangle);$$

3° $\mathcal{H}$ est la relation la plus fine telle que

$$0\,\mathcal{H}\langle n \rangle \iff n = 0$$

et

$$\langle\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \ldots, \langle m \rangle\rangle \mathcal{H} \langle n \rangle \iff -m \leq n \leq m;$$

4° $$\mathcal{R}\, n = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0, \\ -(2n+1) & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour tout entier positif p, on a

$$\Gamma\, \mathcal{H} \langle -p \rangle \iff p \in \tilde{\Gamma},$$

où

$$\tilde{\Gamma} = \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \ldots, \langle p \rangle\};$$

d'où, en particulier,

$$\{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \ldots, \langle p \rangle\}\, \mathcal{H} \langle -p \rangle.$$

Il en résulte que si $\langle -p \rangle$ est le conséquent d'une règle $\mathcal{R}$ d'un système logistique qui engendre $\mathcal{S}$, cette règle possède au moins p antécédents. Ceci étant vrai pour tout entier positif p, toute axiomatisation de $\mathcal{S}$ possède une infinité de règles primitives.

15. Commentaires.

1° La notion de système déductionnel, telle qu'elle vient d'être définie, est nouvelle, tout au moins à ma connaissance. Cependant, les systèmes dits de « déduction naturelle » définis par Gentzen 1934 (systèmes N) étaient des cas particuliers de systèmes déductionnels. Il faut remarquer que certaines des « règles » des systèmes N de Gentzen, et des systèmes analogues, ne sont pas des règles au sens défini ci-dessus (Déf. 11.7), mais qu'elles expriment des propriétés de la déductibilité, plus complexes que les règles (voir en particulier le « Théorème de déduction » considéré par Gentzen comme une règle). Par contre, les systèmes H et les systèmes L définis dans Gentzen 1934 sont des systèmes logistiques, et leurs règles sont de véritables règles.

2° Des structures mathématiques très analogues aux systèmes déductionnels avaient déjà été définies dans Tarski 1930.*a* et

Tarski 1930.*b*. La principale différence est que Tarski utilisait la notion de « conséquence » à la place de la relation de déductibilité.

On démontre facilement que la relation de déductibilité d'un système logistique $\vdash_{\mathcal{S}}$ et la fonction conséquence $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}$ de ce même système peuvent se définir mutuellement par

$$x \in \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\,\mathfrak{U} \iff \exists\,\Gamma\,(\Gamma \in \mathfrak{S}(\mathfrak{U}) \wedge \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x)$$

et par

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x \iff \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\,\tilde{\Gamma}.$$

Ceci pour toute formule x, toute suite finie de formules Γ et tout ensemble (fini ou infini) $\mathfrak{U}$ de formules.

Les propriétés précédentes qui lient la déductibilité et la fonction conséquence sont également valables pour les systèmes déductionnels. On pourrait donc, comme l'ont fait Tarski et plusieurs de ses élèves, considérer la notion de conséquence comme une notion primitive à la place de la relation de déductibilité; les structures ainsi définies pourraient remplacer les structures déductionnelles et rendre les mêmes services. Dans ce cas, les conditions (1)-(4) du Théorème 12.1 (qui caractérisent la déductibilité) seraient remplacées par les conditions suivantes, qui caractériseraient la fonction conséquence : Cn étant une application de $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{F})$, la fonction Cn serait caractérisée par les trois conditions suivantes ([15.1]) :

(1) $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$;

(2) $\mathrm{Cn}\,\mathrm{Cn}\,\mathfrak{U} = \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$;

(3) $\mathrm{Cn}\,\mathfrak{U} = \bigcup_{\mathcal{Y} \in \mathfrak{P}_f(\mathfrak{U})} \mathrm{Cn}\,\mathcal{Y}$.

Bien que ces conditions soient plus simples que celles qui caractérisent la relation de déductibilité, j'ai préféré adopter la relation de déductibilité comme notion fondamentale pour la raison suivante : dans les systèmes déductionnels on utilise des *suites finies* de formules; or, il y a dans la littérature des travaux dans lesquels on prend l'ensemble des formules d'un système formel (déductionnel ou logistique) comme alphabet d'un autre système formel; voir en particulier Łoś-Suszko 1958 (les systèmes L de Gentzen 1934 sont construits de façon analogue).

([15.1]) Tout ce qui concerne la fonction conséquence est emprunté à Tarski 1930.*a* et à d'autres œuvres du même auteur.

CHAPITRE 5.

SYSTÈMES THÉTIQUES.

16. **Notions fondamentales.**

DÉFINITION 16.1. — On appellera « *système thétique* » toute structure

$$\mathcal{S}'' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{N} \rangle,$$

où $\mathcal{E}$ (l'ensemble de base, ou « alphabet »), $\mathcal{F}$ (l'ensemble des formules) et $\mathcal{N}$ (la numérotation de l'alphabet) sont comme dans les Définitions 11.1 et 14.1, et où $\mathcal{C}$ est une partie *quelconque* de $\mathcal{F}$ appelée ensemble des « *thèses* ».

J'écrirai encore « $\vdash_{\mathcal{S}''} x$ » (l'indice pouvant être supprimé quand aucune ambiguïté n'est à craindre) pour indiquer que x est une thèse de $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 16.1. — *Si $\mathcal{S}$ est un système logistique* (d'alphabet $\mathcal{E}$, de formules $\mathcal{F}$, et de numérotation $\mathcal{N}$) *et si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des thèses de ce système* (Déf. 11.6), *alors*

$$\mathcal{S}'' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{N} \rangle$$

est un système thétique. — Évident.

THÉORÈME 16.2. — *Si $\mathcal{S}'$ est un système déductionnel* ($\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{N}$ ayant le même sens que dans le théorème précédent), *et si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des thèses du système* (Déf. 14.1), *alors*

$$\mathcal{S}'' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \mathcal{N} \rangle$$

est un système thétique. — Évident.

REMARQUE. — Comme dans le cas du Théorème 14.1, je dirai que le système thétique $\mathcal{S}''$ du Théorème 16.1, est « *engendré* » par le système logistique $\mathcal{S}$, ou encore que $\mathcal{S}$ est une « *axiomatisation* » du système thétique $\mathcal{S}''$. On dira aussi, dans le cas du Théorème 16.2, que le système thétique $\mathcal{S}''$ est « *engendré* » par le système déductionnel $\mathcal{S}'$.

Ces conventions de langage sont d'accord entre elles car on a :

THÉORÈME 16.3. — *Si $\mathcal{S}$ est un système logistique qui engendre le système déductionnel $\mathcal{S}'$, et si $\mathcal{S}'$ engendre le système thétique $\mathcal{S}''$, alors $\mathcal{S}$ engendre $\mathcal{S}''$.* — Évident.

THÉORÈME 16.4. — *Pour chaque système thétique $\mathcal{S}''$, il existe au moins un système déductionnel qui l'engendre.*

Il suffit de construire un exemple. Soit

$$\mathcal{S}'' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathfrak{T}, \mathcal{R} \rangle$$

le système thétique en question. Considérons la relation $\mathcal{H}$ définie sur $\mathfrak{S}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ et telle que

$$\Gamma \mathcal{H} x \iff (x \in \tilde{\Gamma} \vee x \in \mathfrak{T}),$$

alors $\mathcal{S}' = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle$ est un système déductionnel qui engendre $\mathcal{S}''$. — Évident, si l'on considère les conditions (1)-(4) du Théorème 12.1.

THÉORÈME 16.5. — *S'il existe au moins deux formules qui ne sont pas des thèses, alors le même système thétique est engendré par au moins deux systèmes déductionnels différents.* — En effet, en conservant les notations des théorèmes précédents le système thétique $\mathcal{S}''$ est engendré par le système déductionnel $\mathcal{S}'$ défini plus haut; d'autre part, si nous définissons la relation $\mathcal{H}_1$ par

$$\Gamma \mathcal{H}_1 x \iff \left(x \in \tilde{\Gamma} \vee x \in \mathfrak{T} \vee \left(x \in \bigcap \mathfrak{T} \wedge \tilde{\Gamma} \cap \bigcap \mathfrak{T} \neq \emptyset\right)\right)$$

alors $\mathcal{S}'_1 = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}_1, \mathcal{R} \rangle$ est un système déductionnel qui engendre $\mathcal{S}''$ et qui est différent de $\mathcal{S}'$.

THÉORÈME 16.6. — *Pour chaque système thétique, il existe au moins un système logistique qui l'engendre.* — Évident d'après les Théorèmes 14.2, 16.4 et 16.3. — On peut aussi remarquer que tout système thétique est lui-même un système logistique : il suffit de prendre l'ensemble des thèses comme ensemble des axiomes et de n'utiliser aucune règle primitive.

17. Commentaires.

1° C'est à cause du Théorème 16.5 qu'il est commode de désigner la relation de déductibilité par un signe typographique « $\sqsubseteq$ » distinct du signe « $\vdash$ » qui indique la propriété d'être une thèse. La plupart des auteurs ne font pas cette distinction et utilisent le signe « $\vdash$ » pour indiquer la déductibilité. Le signe « $\sqsubseteq$ » a été emprunté à MARKOV 1954.

2° La numérotation de l'alphabet, qui a été introduite dans tous les systèmes formels, n'a pas encore été utilisée de façon explicite. Mais elle permet de distinguer les uns des autres les symboles abstraits (éléments de l'ensemble de base) sans s'occuper des signes typographiques qui les désignent. Autrement dit, le principal rôle de cette numérotation est que les systèmes formels étudiés dans le travail présent n'auront pas d'autres

automorphisme que l'automorphisme identique. On peut aussi remarquer que cette numérotation m'évite d'utiliser les « signes autonymes » (qui sont sensés se désigner eux-mêmes) qu'on trouve chez beaucoup d'auteurs (voir p. ex. CHURCH 1956, § 08); je n'aurai pas davantage besoin d'utiliser le procédé dit des « Quine's corners » (voir QUINE 1951, § 6) ([17.1]).

3° Beaucoup d'auteurs parlent de « systèmes formels » pour désigner tantôt des systèmes logistiques, tantôt des systèmes thétiques; c'est pour éliminer cette confusion que j'ai été amené à créer le néologisme « thétique ». D'autre part, il arrive souvent que certains résultats qu'on trouve dans la littérature et qui paraissent se rapporter à tel ou tel système logistique particulier soient, en réalité, indépendants des axiomes et des règles de ces systèmes et ne se rapportent en fait qu'à leur relation de déductibilité; c'est dans le but de traiter ces cas de façon plus commode que j'ai été amené à introduire une troisième espèce de système formel, les systèmes déductionnels; je me suis aperçu ensuite que ce concept se trouvait déjà presque complètement explicité dans certains travaux déjà anciens, en particulier ceux de Tarski et de Gentzen.

([17.1]) La numérotation de l'alphabet a deux autres avantages. D'une part, elle permet de définir « *l'ordre alphabétique* » des symboles : un symbole s précède un autre symbole r dans l'ordre alphabétique si le numéro de s est plus petit que le numéro de r; l'ordre alphabétique est utilisé par exemple dans CHURCH 1956, § 10 ou encore dans QUINE 1951, § 14, et dans beaucoup d'autres travaux. D'autre part, si les numéros des symboles sont tous des nombres finis, la numérotation est prête à être utilisée dans les questions de récursivité, lesquelles ne seront pas étudiées dans le travail présent (voir p. ex. LACOMBE 1960). Par contre, l'introduction de la numérotation de l'alphabet dans la définition des systèmes logistiques a un inconvénient : si l'on change la numérotation sans rien changer d'autre, on n'a plus le même système logistique (par abus de langage, j'identifierai souvent les systèmes logistiques qui ne diffèrent que par la numérotation de l'alphabet).

CHAPITRE 6.

ÉQUIVALENCES, ACCEPTABILITÉS, INDÉPENDANCES.

18. Équivalences diverses entre systèmes formels.

DÉFINITION 18.1 :

1° Deux systèmes logistiques seront dits « *thétiquement équivalents* », ou simplement « T-*équivalents* », s'ils engendrent le même système thétique.

2° Deux systèmes logistiques seront dits « *déductionnellement équivalents* «, ou simplement « D-*équivalents* », s'ils engendrent le même système déductionnel.

3° Deux systèmes déductionnels seront dits « *équivalents* » s'ils engendrent le même système thétique.

REMARQUES :

1° Dans le cas des systèmes déductionnels, il est inutile de préciser davantage car rien ne rappelle la distinction entre T-équivalence et D-équivalence, qui existe dans les systèmes logistiques.

2° L'emploi qui a été fait du mot « équivalent » est justifié par le fait que la Définition 18.1 définit trois relations d'équivalence; en effet, il est évident que chacune de ces trois relations est réflexive, symétrique et transitive.

THÉORÈME 18.1. — *Si deux systèmes logistiques sont* D-*équivalents, ils sont aussi* T-*équivalents.* — Évident.

THÉORÈME 18.2. — *Il existe des systèmes logistiques qui sont* T-*équivalents sans être* D-*équivalents.*

Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer une axiomatisation du système déductionnel $\mathcal{S}'$ utilisé dans la démonstration du Théorème 16.5, et d'autre part, une axiomatisation du système déductionnel $\mathcal{S}'_1$ utilisé dans la démonstration du même théorème.

Le Théorème 18.2 (avec les conséquences qui s'ensuivent immédiatement concernant l'acceptabilité et l'indépendance des règles, voir § 19)

est le résultat principal du chapitre présent. Les systèmes logistiques qui ont été construits pour le démontrer sont artificiels, mais il existe dans la littérature un grand nombre de cas où deux systèmes logistiques sont T-équivalents (c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes thèses) sans être D-équivalents (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas la même déductibilité); c'est le cas par exemple pour les systèmes P_2 et P de CHURCH 1956 (deux systèmes pour le calcul propositionnel classique, l'un avec et l'autre sans la « règle de substitution »); comme autre cas classique, on pourra comparer le système bien connu pour le calcul des prédicats du premier ordre, qui est exposé dans CHURCH 1956, Ch. 3, avec celui qui est exposé dans QUINE 1951, § 16 ([18.1]) (le premier système utilise la « règle de généralisation », le second système ne l'utilise pas).

THÉORÈME 18.3. — *Si deux systèmes logistiques sont* T*-équivalents, et si de plus ils ont les mêmes règles primitives, ils sont aussi* D*-équivalents.*

En effet, supposons que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux systèmes logistiques satisfaisant aux conditions du Théorème 18.3, et supposons que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_1} x$, il existe donc une suite de formules

$$\Delta_1 = \langle z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n \rangle \qquad (z_n = x)$$

qui est une déduction de z_n à partir de Γ dans $\mathcal{S}_1$; certains des éléments de Δ_1 peuvent être des axiomes de $\mathcal{S}_1$ sans être des axiomes de $\mathcal{S}_2$; mais ce sont des thèses de $\mathcal{S}_2$, qui possèdent donc dans $\mathcal{S}_2$ une déduction à partir de O; dans Δ_1, intercalons ces déductions (dans $\mathcal{S}_2$) immédiatement avant chacun des éléments de Δ_1 qu'ils déduisent; on obtient ainsi une suite de formules Δ_2 qui est une déduction de x à partir de Γ dans $\mathcal{S}_2$, donc,

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_1} x \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash_{\mathcal{S}_2} x.$$

La réciproque se démontre exactement de la même façon.

REMARQUES :

1° Le Théorème 18.3 établit une dissymétrie entre les schémas d'axiomes et les règles de déduction primitives d'un système logistique.

2° Certains auteurs considèrent les schémas d'axiomes comme des règles o-aires. Je n'ai pas adopté cette convention, à cause de la dissymétrie qui vient d'être remarquée.

THÉORÈME 18.4. — *L'ensemble des systèmes déductionnels qui engendrent un même système thétique, ordonné naturellement, constitue un treillis complet.*

([18.1]) En fait, dans QUINE 1951, toutes les thèses sont des formules closes; pour un système analogue mais plus facile à comparer avec celui de CHURCH 1956, voir p. ex. PORTE 1957.

En effet, d'une part, cet ensemble de relations possède un élément maximum, à savoir la relation $\mathcal{H}$ qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

$$x \in \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{O}\,\mathcal{H}\,x,$$

$$\{x, z\} \subseteq \bigcap \mathfrak{S} \rightarrow x \setminus \mathcal{H}\, z.$$

D'autre part, d'après la forme de la Définition 14.1, l'intersection de plusieurs relations qui engendrent un même système thétique engendre aussi le même système thétique. Donc, tout ensemble de déductibilités qui engendre un même système thétique possède une borne inférieure (leur intersection) et une borne supérieure (l'intersection de toutes les relations de déductibilité engendrant le même système thétique, et moins fines que toutes les relations considérées).

Bien qu'il ait un sens très différent de celui du théorème précédent, le théorème suivant se démontre de façon à peu près identique :

Théorème 18.5. — *L'ensemble de tous les systèmes déductionnels ayant même alphabet, mêmes formules et même numérotation, ordonné naturellement, constitue un treillis complet.* — Ici, l'élément maximum est la relation qui tient entre une suite finie quelconque de formules et une formule quelconque.

19. Acceptabilités et indépendance.

Définition 19.1. — Une règle $\mathcal{R}$ sera dite « T-*acceptable* » (respect. « D-*acceptable* ») dans un système logistique $\mathcal{S}$, si le système $\mathcal{S}\,(+\,\mathcal{R})$, obtenu en ajoutant à $\mathcal{S}$ la règle $\mathcal{R}$ comme règle primitive, est T-équivalent (respect. D-équivalent) à $\mathcal{S}$.

Définition 19.2. — Une règle *primitive* $\mathcal{R}$ sera dite « T-*indépendante* » (respect. « D-*indépendante* ») dans un système logistique $\mathcal{S}$, si le système $\mathcal{S}\,(-\,\mathcal{R})$, obtenu à partir de $\mathcal{S}$ en supprimant la règle primitive $\mathcal{R}$, reste T-équivalent (respect. D-équivalent) à $\mathcal{S}$.

Définition 19.3. — Un schéma d'axiomes $\mathfrak{A}$ sera dit « *indépendant* » dans un système logistique $\mathcal{S}$, si le système $\mathcal{S}\,(-\,\mathfrak{A})$, obtenu à partir de $\mathcal{S}$ en supprimant le schéma d'axiomes $\mathfrak{A}$, reste équivalent à $\mathcal{S}$.

Remarques :

1° A cause du Théorème 18.3, on peut parler de schéma d'axiomes « indépendants » sans avoir précisé davantage. Dans la Définition 19.3, le mot « équivalent » peut être remplacé à volonté par « T-équivalent » ou « D-équivalent », toujours à cause du Théorème 18.3.

2° Quand un schéma d'axiomes contient plus d'un axiome, il peut être indépendant même si certains des axiomes qui lui appartiennent ne sont pas indépendants ([19.1]).

3° Par analogie avec la Définition 19.1, on peut définir des « schémas acceptables ». C'est sans intérêt, car ces « schémas acceptables » se confondent avec les ensembles de thèses (voir Thm. 19.2).

THÉORÈME 19.1. — *Une règle $\mathscr{R}$ est* T-*acceptable* (*respect.* D-*acceptable*) *dans un système logistique $\mathscr{S}$ si et seulement si elle n'est pas* T-*indépendante* (*respect.* D-*indépendante*) *dans le système qui résulte de $\mathscr{S}$ en y ajoutant $\mathscr{R}$ comme règle primitive.* — Conséquence immédiate des Définitions 19.1 et 19.2.

THÉORÈME 19.2. — *Un schéma est* T-*acceptable si et seulement si il est* D-*acceptable. Un schéma d'axiomes est* T-*indépendant si et seulement si il est* D-*indépendant.* — Évident (voir Thm. 18.3).

Ce dernier résultat permet de parler de « *schéma acceptable* » et surtout de « *schéma d'axiomes indépendant* » sans autre précision.

THÉORÈME 19.3. — *Toute règle* D-*acceptable est aussi* T-*acceptable. Toute règle* T-*indépendante est aussi* D-*indépendante.* — Évident.

THÉORÈME 19.4 :

1° *Il existe des systèmes logistiques dans lesquels certaines règles sont* T-*acceptables sans être* D-*acceptables.*

2° *Il existe des systèmes logistiques dans lesquels une règle primitive au moins est* D-*indépendante sans être* T-*indépendante.*

Ces deux résultats sont des conséquences immédiates du Théorème 18.2, on en verra des exemples plus loin ([19.2]).

THÉORÈME 19.5. — *Soit $\mathscr{S}$ un système logistique et $\mathscr{R}$ une règle à n antécédents :*

1° *$\mathscr{R}$ est* D-*acceptable dans $\mathscr{S}$ si et seulement si*

$$\mathscr{R}(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \vdash_{\mathscr{S}} y$$

pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n\, y$.

2° *$\mathscr{R}$ est* T-*acceptable dans $\mathscr{S}$ si et seulement si*

$$\mathscr{R}(x_1, \ldots, x_n, y) \Rightarrow ((\vdash_{\mathscr{S}} x_1 \wedge \ldots \wedge \vdash_{\mathscr{S}} x_n) \Rightarrow \vdash_{\mathscr{S}} y).$$

([19.1]) Par exemple, dans le CPC-FL (voir § 35) le schéma d'axiomes constitué par toutes les formules de la forme $(\neg x \supset \neg y) \supset (y \supset x)$ est indépendant; mais ce schéma contient entre autres l'axiome $(\neg p_1 \supset \neg p_1) \supset (p_1 \supset p_1)$ qui n'est pas indépendant.

([19.2]) Voir plus loin Thm. 36.2.

Ces deux propositions sont des conséquences immédiates de la Définition 19.1. Si l'on tient compte du Théorème 19.4, il en résulte qu'il faut distinguer soigneusement, par exemple, les deux expressions suivantes :

(1) $\langle x \rangle \sqsubset y$;

(2) $\vdash x \Rightarrow \vdash y$.

En effet, si (1) est vraie, (2) l'est aussi; mais la réciproque est souvent fausse.

Remarques :

1° Les règles non primitives qui sont T-acceptables sont souvent appelées « règles dérivées ». Mais il résulte de ce qui précède qu'il faut distinguer deux sortes de « règles dérivées » : d'une part, celles qui sont en même temps T- et D-acceptables, d'autre part, celles qui sont T-acceptables mais non D-acceptables.

2° Les notions et les résultats qui précèdent se trouvent un peu partout dans la littérature, mais le plus souvent sous forme implicite et quelquefois peu claire. Le premier exemple, à ma connaissance, de règle D-indépendante sans être T-indépendante se trouve dans Gentzen 1934, § 2.5 (la possibilité d' « éliminer » la règle dite « coupure » dans certains systèmes, est ce que Gentzen appelle « le théorème fondamental »). Il n'a manqué à Gentzen qu'un vocabulaire adéquat pour que son exposé soit tout à fait moderne. On ne peut pas en dire autant de certains travaux plus récents. Ainsi dans McKinsey 1936, l'auteur démontre l' « indépendance » des règles de Hilbert-Ackermann 1928 pour le calcul des prédicats du premier ordre; mais il n'avait démontré en réalité que leur D-indépendance; la T-indépendance de ces mêmes règles est démontrée dans Hilbert-Ackermann 1938. Church qui rapporte ces faits (Church 1956, § 49), remarque la différence entre les deux sortes d'indépendances mais n'en donne pas de définition, ailleurs; le même auteur (Church 1956, § 41), introduit dans un système logistique pour le calcul des prédicats de premier ordre des règles D- mais non T-indépendantes; il remarque le fait, mais ne l'explique que par des considérations sémantiques, d'ailleurs correctes, mais étrangères au sujet qu'il traitait. Curry 1952, p. 86, explique correctement la nature du « théorème fondamental » de Gentzen, mais la nature de son « formalisme » semble l'empêcher de développer ce genre de question. Le premier système logistique pour le calcul propositionnel classique, dans lequel la « règle de détachement » n'est pas D-acceptable, se trouve dans Hiż 1957; un commentaire correct de ce fait se trouve dans Hiż 1959, § 1 ([19.3]).

([19.3]) La Note Porte 1960.*c* est postérieure aux travaux de Hiż, mais le résultat qui y est exposé avait été prouvé de façon indépendante.

CHAPITRE 7.

DÉTACHEMENT ET RATTACHEMENT.

20. — Les notions et les résultats de ce chapitre se rapportent aux systèmes déductionnels — ou aux systèmes logistiques en tant qu'ils engendrent des systèmes déductionnels.

DÉFITION 20.1. — Soit

$$\mathfrak{S} = \langle \mathscr{E}, \mathscr{F}, \vdash, \mathscr{R} \rangle$$

un système déductionnel, et soit d une application de $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$, dans $\mathscr{F}$, alors :

1° On dira que « $\mathfrak{S}$ possède la propriété de *détachement relativement à d* » si

$$(1) \quad \Gamma \vdash d(x, y) \Rightarrow \Gamma \, \mathcal{S} \langle x \rangle \vdash y,$$

Γ étant une suite finie quelconque de formules, x et y étant des formules quelconques.

2° On dira que « $\mathfrak{S}$ possède la propriété de *rattachement relativement à d* » si

$$(2) \quad \Gamma \, \mathcal{S} \langle x \rangle \vdash y \Rightarrow \Gamma \vdash d(x, y).$$

REMARQUES :

1° Les deux parties de la Définition 20.1 ont leur origine dans TARSKI 1930.*a*, Axiomes 7* et 8*. La Définition 20.1 constitue une généralisation des notions classiques par suite de l'introduction d'une fonction arbitraire *d*.

2° La propriété de rattachement est appelée, en général, dans la littérature « théorème de déduction ». Je n'ai pas conservé ce nom car il suggère l'idée que la fonction d aurait autant d'importance que la

déductibilité, or, cela n'est pas vrai en général, car, dans la plupart des systèmes déductionnels il n'existe pas de fonction d satisfaisant à (2), tandis que la relation de déductibilité existe toujours.

THÉORÈME 20.1. — *On a la propriété de détachement relativement à d si et seulement si*

$$(3)\quad \langle x, d(x, y)\rangle \sqsupseteq y$$

pour toutes formules x et y. — Immédiat en posant $\Gamma = \langle d(x, y)\rangle$.

REMARQUE. — Le résultat précédent justifie le nom de « détachement ». L'expression (3) peut être considérée comme décrivant une règle de déduction; à savoir la règle $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{R}(x, x', y) \iff x' = d(x, y).$$

Cette règle s'appelle alors « règle de détachement » relativement à d ([20.1]).

THÉORÈME 20.2. — *Dans un système logistique, on a la propriété de rattachement pour d si le système satisfait aux trois propriétés suivantes :*

$$(4)\quad \vdash d(x, x);$$
$$(5)\quad \langle y\rangle \sqsupseteq d(x, y);$$

(6) *Pour chacune des règles primitives $\mathcal{R}_i$, à n_i antécédents,*

$$\mathcal{R}_i(y_1, \ldots, y_{n_i}, z) \Rightarrow \langle d(x, y_1), \ldots, d(x, y_{n_i})\rangle \sqsupseteq d(x, z).$$

Démonstration ([20.2]). — En utilisant la fonction conséquence (§ 12), la propriété de rattachement s'écrit

$$(7)\quad y \in \mathrm{Cn}(\mathfrak{U} \cup \{x\}) \Rightarrow d(x, y) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$$

(x et y étant des formules quelconques, et $\mathfrak{U}$ étant un ensemble fini quelconque de formules). En posant

$$(8)\quad \mathfrak{V} = \{u \mid d(x, u) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}\}.$$

Il suffit de démontrer

$$(9)\quad \mathrm{Cn}(\mathfrak{U} \cup \{x\}) \subseteq \mathfrak{V}.$$

Mais $\mathrm{Cn}(\mathfrak{U} \cup \{x\})$ est le plus petit ensemble qui contient x comme élément, contient $\mathfrak{U}$ comme partie, contient l'ensemble des axiomes $\mathfrak{A}$

([20.1]) Ainsi dans le CPC-FL (voir § 35), on aura les règles de détachement relativement à l'implication et relativement à la double-implication.

([20.2]) Cette démonstration est identique à celle qui se trouve dans TARSKI 1933 (Thm. 2), où l'auteur ne l'avait appliquée que dans un cas particulier. Voir aussi KALMAR 1935.

comme partie, et est fermé pour chacune des règles primitives ($\mathcal{R}_i$, ... à n_i antécédents). D'après (8), il est équivalent d'écrire

(10) $d(x, x) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$;

(11) $y \in \mathfrak{U} \Rightarrow d(x, y) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$;

(12) $y \in \mathfrak{A} \Rightarrow d(x, y) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}$;

(13) Pour chaque règle primitive :

$$\mathcal{R}_i(y_1, \ldots, y_{n_i}, z) \Rightarrow (d(x, y_1) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U} \wedge \ldots \wedge d(x, y_{n_i}) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U} \Rightarrow d(x, z) \in \mathrm{Cn}\,\mathfrak{U}).$$

Or, la conjonction des conditions (10)-(13) est équivalente à la conjonction des conditions (4)-(6). En effet, d'une part, il est évident que (4)-(6) $\Rightarrow$ (10)-(13). Réciproquement, (10) se réduit à (4) pour $\mathfrak{U} = \mathrm{O}$, (11) se réduit à (5) pour $\mathfrak{U} = \{y\}$, et (13) se réduit à (6) pour $\mathfrak{U} = \{y_1, \ldots, y_{n_i}\}$ — en tenant compte de (11).

THÉORÈME 20.3. — *Dans un système logistique qui possède la propriété de détachement pour d, la propriété de rattachement pour d est équivalente à la conjonction des conditions* (4), (5) *et* (6) *du Théorème* 20.2.

En effet, des propriétés de détachement et de rattachement pour d, on tire immédiatement les propriétés (4)-(6).

THÉORÈME 20.4. — *Dans un système logistique qui ne possède pas la propriété de détachement pour d, les propriétés* (4) *et* $\vdash d(y, d(x, y))$ *n'impliquent pas la condition* (6) *du Théorème* 20.2.

Il suffit d'en donner un exemple. C'est un système logistique connectif (voir plus loin Ch. 9). Son alphabet est constitué d'une infinité dénombrable d'atomes p_1, p_2, etc., d'un connecteur binaire C, et d'un connecteur unaire D ([20.3]). Les axiomes sont les formules de la forme $a\,\mathrm{D}x$, où x est une sous-formule qui a une autre occurrence dans a. Il y a deux règles primitives ([20.4])

$\mathcal{R}_1$: $x \vdash\!\!\sqsupset \mathrm{D}x$,

$\mathcal{R}_2$: $\mathrm{D}x \vdash\!\!\sqsupset \mathrm{C}y\,\mathrm{D}x$.

Il s'ensuit que les thèses sont identiques aux axiomes.

En posant $d(x, y) = \mathrm{C}xy$ les propriétés (4) et $\vdash d(y, d(x, y))$ sont triviales.

([20.3]) Les formules sont définies de la manière qui est usuelle dans les systèmes connectifs; voir plus loin § 24. La numérotation de l'alphabet est quelconque.

([20.4]) Pour la notation des règles, voir plus loin § 26.

Mais la propriété (6) est fausse car on a $p_2 \vdash \mathrm{D}p_2$ par la règle primitive $\mathscr{R}_1$ tandis qu'on a $\dashv(\mathrm{C}p_1p_2 \vdash \mathrm{C}p_1\mathrm{D}p_2)$ parce que $\mathrm{C}p_1\mathrm{D}p_2$ n'est pas une thèse et ne peut pas être déduite de $\mathrm{C}p_1p_2$ par les règles.

Remarques :

1° Les conditions (4) et (5) du Théorème 20.2 sont des conséquences immédiates de la propriété de rattachement pour d, même si le système considéré n'a pas la propriété de détachement pour d.

2° Dans le système considéré pour démontrer le Théorème 20.4, la règle de détachement pour d n'est évidemment ni D-acceptable ni T-acceptable.

Commentaires :

1° Dans le cas de certains systèmes logistiques usuels pour le calcul propositionnel classique (voir plus loin Ch. 13), on a la propriété de rattachement pour d telle que $d(x, y) = x \supset y$. Ceci est connu, sous le nom de « Théorème de déduction », depuis Tarski 1930.*a*, l'auteur l'ayant découvert en 1921 (voir Tarski 1956, note de la page 32). Voir aussi Herbrand 1930.

2° L'idée d'énoncer la propriété de rattachement pour une fonction d autre que « l'implication » est empruntée à Church 1956 où l'on en trouve un cas particulier (Exercice 19.8). Ruth Barcan avait également essayé de généraliser le théorème de rattachement pour divers calculs modaux (voir Barcan 1946.*b*). Les résultats de Moh Shaw-Kwei 1950 sont analogues à ceux du travail présent, mais différents, certains étant plus forts et d'autres plus faibles. On trouve encore d'autres généralisations dans Curry 1954 et dans Curry 1960.

3° On trouvera plus loin au Chapitre 14 des applications des théorèmes généraux qui précèdent, en particulier, au calcul trivalent de Łukasiewicz et à diverses axiomatisations des calculs modaux S 4 et S 5 de Lewis.

CHAPITRE 8.

EXTENSIONS, CONGRUENCES, DÉFINITIONS FORMELLES.

21. Extensions.

DÉFINITION 21.1. — On appellera extension du système thétique $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle$ tout système thétique $\mathfrak{S}' = \langle \mathcal{E}', \mathcal{F}', \mathcal{H}', \mathcal{R}' \rangle$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$;
(2) $a' \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{R}' a' = \mathcal{R} a'$;
(3) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$;
(4) $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$.

DÉFINITION 21.2. — Une extension d'un système thétique sera dite « T-*conservative* » si toute thèse du système étendu, qui est une formule du système restreint, est encore une thèse du système restreint, autrement dit si $\mathfrak{C}' \cap \mathcal{F} = \mathfrak{C}$.

DÉFINITION 21.3. — Une extension $\mathfrak{S}'$ d'un système thétique $\mathfrak{S}$ sera dite « E-*conservative* » si l'on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, elle sera dite « F-*conservative* » si l'on a $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, elle sera dite « EF-*conservative* » si elle est simultanément E-conservative et F-conservative.

DÉFINITION 21.4. — Un système déductionnel $\mathfrak{S}' = \langle \mathcal{E}', \mathcal{F}', \mathcal{H}', \mathcal{R}' \rangle$ sera appelé une « T-*extension* » du système déductionnel $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{R} \rangle$ si elle satisfait aux conditions (1), (2) et (3) de la Définition 21.1 et à la condition suivante :

(5) $\vdash_{\mathfrak{S}} x \Rightarrow \vdash_{\mathfrak{S}'} x$.

Il sera appelé une « D-*extension* » de $\mathfrak{S}$ s'il satisfait aux conditions (1), (2) et (3) de la Définition 21.1 et à la condition suivante :

(6) $\Gamma \models_{\mathfrak{S}} x \Rightarrow \Gamma \models_{\mathfrak{S}'} x$.

REMARQUES :

1° Les extensions T-conservatives des systèmes thétiques sont généralement appelées dans la littérature des « extensions conservatives »

(voir ROSENBLOOM 1950, Ch. 4). J'ai modifié ce vocabulaire traditionnel de façon à pouvoir désigner commodément d'autres classes d'extensions.

2° Toutes les notions définies par les Définitions 21.421.2 et 21.3 s'étendent sans modifications aux systèmes logistiques.

3° Pour les systèmes logistiques et déductionnels, on pourra définir des extensions D-*conservatives*, celles-ci étant caractérisées par la condition suivante :

$$\tilde{\Gamma} \cup \{x\} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad (\Gamma \vdash_{\mathcal{S}'} x \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} x).$$

Cela revient à dire que toute déduction dans le système étendu, qui ne comprend que des formules du système restreint, est encore une déduction du système restreint.

Si un système logistique $\mathcal{S}'$ est une EF-extension du système $\mathcal{S}$ je dirai que $\mathcal{S}'$ est une « A-*extension* » de $\mathcal{S}$ s'il en diffère seulement par l'adjonction d'un ou plusieurs schémas d'axiomes supplémentaires; je dirai aussi que $\mathcal{S}'$ est une « R-*extension* » de $\mathcal{S}$ s'il n'en diffère que par l'adjonction d'une ou plusieurs règles primitives.

THÉORÈME 21.1. — *Il existe des systèmes logistiques dans lesquels certaines règles sont* T-*acceptables, mais cessent de l'être dans certaines* A-*extensions de ces systèmes.*

Il suffit de donner un exemple. Considérons un système logistique qui contient au moins deux formules différentes qui ne sont pas des thèses, a, b, et considérons la règle $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{R}(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (x = a \wedge y = b).$$

Cette règle est T-acceptable dans le système. Définissons une A-extension de ce système en lui adjoignant le schéma d'axiomes $\mathcal{A} = \{a\}$, alors la règle $\mathcal{R}$ n'est plus T-acceptable.

REMARQUE. — On vient de démontrer le Théorème 21.1 en utilisant des systèmes logistiques très simples ainsi qu'une règle très simple. Cependant, tout cela a un caractère artificiel. Pour des exemples plus « naturels », voir CHURCH 1956, p. 112, note 495.

THÉORÈME 21.2. — *Il existe des systèmes logistiques dans lesquels certaines règles ne sont pas* T-*indépendantes, mais deviennent* T-*indépendantes dans certaines* A-*extensions de ces systèmes.* — Conséquence immédiate du Théorème 21.1.

THÉORÈME 21.3. — *Il existe des systèmes logistiques dans lesquels certaines règles sont* T-*indépendantes, mais cessent de l'être dans certaines* A-*extensions de ces systèmes.* — Immédiat : il suffit d'ajouter l'ensemble des thèses comme schéma d'axiomes supplémentaire. Ce théorème n'a

été énoncé que pour comparaison avec le Théorème 21.2, lequel est moins évident.

THÉORÈME 21.4. — *Si $\mathcal{S}'$ est une* A-*extension du système logistique $\mathcal{S}$ et si $\mathfrak{A}'$ est l'ensemble des axiomes supplémentaires, alors* $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}'}\emptyset = \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\mathfrak{A}'$. — Immédiat d'après le Théorème 12.1 et la remarque 2° du Théorème 12.3.

En particulier, $\mathcal{S}$ étant un système logistique quelconque et $\mathfrak{A}$ l'ensemble de ses axiomes, si $\mathcal{S}^0$ est le système logistique obtenu à partir de $\mathcal{S}$ en supprimant tous les schémas d'axiomes, alors $\mathrm{Cn}_{\mathcal{S}}\emptyset = \mathrm{Cn}_{\mathcal{S}^0}\mathfrak{A}$.

THÉORÈME 21.5. — *Soit* K *une classe de systèmes déductionnels ayant même alphabet, mêmes formules, et même numérotation de l'alphabet, alors la relation sur* K *« être une* T-*extension de » est un pré-ordre* ([21.1]). — Évident.

THÉORÈME 21.6. — *Si la classe* K *est comme dans le théorème précédent, et si la relation* R *est la* T-*équivalence, alors la classe* K/R *est structurée en treillis complet par la relation quotient* $\mathrm{E_T/R}$, *où* $\mathrm{E_T}$ *est la relation « être une* T-*extension de ».*

En effet, en considérant les systèmes thétiques engendrés par ces systèmes déductionnels, on voit que la relation en question est isomorphe à la relation d'inclusion sur l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$.

THÉORÈME 21.7. — *L'ensemble des systèmes déductionnels qui ont même alphabet, mêmes formules et même numérotation, ordonné naturellement* ([21.2]), *constitue un treillis complet.* — Il y a un maximum évident. Tout sous-ensemble a une borne inférieure : l'intersection des déductibilités. Tout sous-ensemble a une borne supérieure : l'intersection des extensions communes à tous les éléments du sous-ensemble.

THÉORÈME 21.8. — *L'ensemble des systèmes déductionnels engendrés par les* A-*extensions d'un même système logistique, constitue un treillis complet.* — Démonstration analogue à celle du Théorème 21.7.

COMMENTAIRE. — Beaucoup de résultats ou de problèmes qu'on trouve épars dans la littérature se rapportent, en réalité, à des propriétés du treillis dont l'existence vient d'être démontrée. Ainsi, le « théorème d'extensibilité maximum », de Lindenbaum (voir TARSKI 1930.*a*,

---

([21.1]) Je rappelle qu'un pré-ordre est une relation binaire symétrique et réflexive.

([21.2]) L'ordination naturelle de ces systèmes déductionnels (qui ne diffèrent que par leurs déductibilités) est l'ordination induite par l'ordination par inclusion de leurs déductibilités.

Thm. 12 ou TARSKI 1930.*b*, Thm. 55) énonce le fait que, sous des conditions assez générales, le treillis dual possède des « points » ([21.3]). Le « degré cardinal d'extensibilité » (voir TARSKI 1930.*b*, § 8) est le nombre de ces points. Le degré « ordinal d'extensibilité » (voir TARSKI 1930.*b*, § 8) est le type d'ordre maximum d'un sous-ensemble bien ordonné dans le treillis dont l'existence est affirmée par le Théorème 21.8.

Il faut rappeler les définitions suivantes, qui sont classiques.

DÉFINITION 21.5. — Un système formel (logistique, déductionnel ou thétique) est dit « *consistant* » s'il existe au moins une formule qui n'est pas une thèse.

DÉFINITION 21.6. — Un système déductionnel $\mathcal{S}$ est dit « *saturé* » si aucune D-extension de $\mathcal{S}$, EF-conservative, et différente de $\mathcal{S}$, n'est consistante. Un système logistique est dit saturé si le système déductionnel qu'il engendre est saturé.

On voit donc que les systèmes logistiques consistants sont ceux dont le degré ordinal d'extensibilité est $\neq 1$, et que les systèmes logistiques saturés sont ceux dont le degré ordinal d'extensibilité est 2.

Il est clair que ces notions de consistance et de saturation, qui viennent d'être définies pour les systèmes déductionnels font intervenir de façon essentielle la notion de déductibilité. Ces notions peuvent donc être facilement étendues aux systèmes logistiques, mais dans le cas des systèmes thétiques elles n'ont aucun sens ou tout au moins peu d'intérêt.

THÉORÈME 21.9. — *L'ensemble des systèmes déductionnels qui engendrent un même système thétique, ordonné naturellement, constitue un treillis complet.*

Démonstration. — D'abord l'ensemble possède un élément maximum, à savoir le système déductionnel dans lequel n'importe quelle formule est déductible de n'importe quelle suite finie de non-thèses. De plus, tout sous-ensemble possède une borne inférieure, obtenue en prenant l'intersection des relations de déductibilité de tous les éléments de cet ensemble : on obtient bien une relation de déductibilité à cause de la forme des propositions (1) à (6) du Théorème 12.1. Enfin, tout sous-ensemble possède une borne supérieure obtenue en prenant l'intersection de celles des D-extensions communes à tous les éléments des sous-ensembles qui engendrent le système thétique donné; il en existe puisqu'il y a un élément maximum.

REMARQUE. — Ce treillis doit posséder un élément minimum. C'est évidemment le système déductionnel dans lequel une formule quelconque

---

([21.3]) Voir DUBREIL-DUBREIL-JACOTIN 1961, p. 169.

n'est déductible d'une suite finie de formules que si elle lui appartient ou si elle est une thèse.

22. Congruences.

Ce qui suit se rapporte aux systèmes thétiques et peut aussi bien s'appliquer aux systèmes logistiques et déductionnels qui les engendrent.

Définition 22.1. — On appellera « *congruence* » d'un système thétique toute relation d'équivalence entre formules qui est compatible avec la concaténation et avec l'ensemble des thèses. Plus précisément, une congruence est une relation binaire E sur l'ensemble des formules, $\mathcal{F}$, satisfaisant aux six conditions suivantes (où x et y sont des formules quelconques, et a et b sont des mots quelconques) :

(1) $x \mathrm{E} x$;
(2) $x \mathrm{E} y \Rightarrow y \mathrm{E} x$;
(3) $(x \mathrm{E} y \text{ et } y \mathrm{E} z) \Rightarrow x \mathrm{E} z$;
(4) $x \mathrm{E} y \Rightarrow (a \,\&\, x \,\&\, b \in \mathcal{F} \Rightarrow a \,\&\, y \,\&\, b \in \mathcal{F})$;
(5) $a \,\&\, x \,\&\, b \in \mathcal{F} \Rightarrow (x \mathrm{E} y \Rightarrow a \,\&\, x \,\&\, b \mathrm{E} a \,\&\, y \,\&\, b)$;
(6) $x \mathrm{E} y \Rightarrow (\vdash x \Rightarrow \vdash y)$.

Théorème 22.1. — *L'ensemble de toutes les congruences d'un même système thétique, ordonné par inclusion, constitue un treillis complet.*

Démonstration. — Considérons un ensemble quelconque de telles congruences. D'une part, cet ensemble possède une borne inférieure qui est l'intersection de toutes les relations appartenant à cet ensemble. D'autre part on vérifie facilement que la fermeture transitive de la réunion de toutes les relations appartenant à cet ensemble satisfait aux conditions (1)-(6); c'est la borne supérieure de l'ensemble ([22.1]).

Remarques :

1° Il suit du Théorème 22.1 que dans chaque système thétique il existe une congruence minimum et une congruence maximum. La congruence maximum est la fermeture transitive de la réunion de toutes les congruences.

2° Un cas particulier important est celui où le treillis des congruences d'un système thétique est réduit à une seule congruence; c'est évidemment l'égalité. On en verra des exemples plus loin (Ch. 10).

3° Pour abréger, je dirai que deux formules d'un système thétique « sont congrues », sans autre précision, quand elles sont congrues pour la congruence maximum du système.

([22.1]) Voir plus haut § 10.

DÉFINITION 22.2. — On appellera « *fonctions de concaténation* » les applications de $\mathcal{F}^n$ (où n est un entier positif quelconque) dans $\mathcal{F}$, qui appartiennent au plus petit ensemble de fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Il contient celles des fonctions $Q_{a_1 \ldots a_m}$ où $m \geqq 2$ où $a_1, \ldots, a_m$ sont des mots fixes et qui sont définies par

$$Q_{a_1 \ldots a_m}(x_1, \ldots, x_{m-1}) = a_1 \mathbin{8} x_1 \mathbin{8} \ldots \mathbin{8} x_{m-1} \mathbin{8} a_m$$

et qui sont des applications de $\mathcal{F}^{m-1}$ dans $\mathcal{F}$.

2° Il contient les fonctions projections de $\mathcal{F}$ c'est-à-dire les fonctions P_k^n ($n \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq n$) définies par

$$P_k^n(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = x_k.$$

3° Il contient les fonctions constantes de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire les fonctions K_u^n ($n \geqq 1$ et $u \in \mathcal{F}$) définies par $K_u^n(x_1, \ldots, x_n) = u$.

4° Il est fermé pour les superpositions de fonctions (voir plus haut § 10).

THÉORÈME 22.2 (« *Théorème de remplacement* »). — *Si* E *est une congruence et f une fonction de concaténation, alors*

$$x_i \mathrm{E} x_i' \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mathrm{E} f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n).$$

Démonstration. — La propriété est évidente pour les fonctions projections, les fonctions constantes, et les fonctions $Q_{a_1 \ldots a_m}$. Il est également évident que la propriété est conservée par les superpositions normales de fonctions; d'où il suit (voir § 10) qu'elle est conservée pour toutes les superpositions de fonctions.

DÉFINITION 22.3 :

1° Une congruence E sera dite « *déterminée par la fonction de concaténation* » (binaire) f si

$$x \mathrm{E} y \iff \vdash f(x, y)$$

pour toutes formules x, y.

2° Une congruence E sera dite « *déterminée par les fonctions de concaténation* » (binaires) $f_1, \ldots, f_n$ si

$$x \mathrm{E} y \iff \vdash f_1(x, y) \wedge \ldots \wedge \vdash f_n(x, y).$$

REMARQUE. — La première partie de la Définition 22.3 est un cas particulier de la deuxième partie, mais il a paru utile de mettre ce cas en évidence à cause de son importance.

THÉORÈME 22.3. — *Si une congruence est déterminée par une ou plusieurs fonctions de concaténation, c'est la congruence maximum.*

Démonstration (dans le cas où la congruence E est déterminée par une seule fonction de concaténation f). — Soit E′ une autre congruence; supposons que $x\mathrm{E}'y$; en utilisant successivement les propriétés (1) et (6) de la Définition 22.1, le théorème de remplacement et la Définition 22.3, on a

$$\begin{gathered} x\,\mathrm{E}\,x, \\ \vdash f(x, x), \\ f(x, x)\,\mathrm{E}'f(x, y), \\ \vdash f(x, y), \\ x\,\mathrm{E}\,y, \end{gathered}$$

donc $x\mathrm{E}'y \Rightarrow x\mathrm{E}y$ quelle que soit la congruence E′.

Dans le cas où une congruence est déterminée par plusieurs fonctions de concaténation, la démonstration est analogue.

REMARQUES :

1° Il s'ensuit que si l'égalité est déterminée par une ou plusieurs fonctions de concaténation, c'est la seule congruence. On en verra des exemples plus loin (voir Ch. 10).

2° Une congruence déterminée par une fonction de concaténation est unique, mais plusieurs fonctions de concaténation peuvent servir pour la déterminer. Par exemple, dans le calcul propositionnel classique, où $\lnot$ est la négation et où $\not\equiv$ est la fonction de double-implication (voir plus loin Ch. 13), on peut déterminer l'équivalence maximum par

$$x\,\mathrm{E}\,y \iff \vdash x \not\equiv y$$

ou bien

$$x\,\mathrm{E}\,y \iff \vdash \lnot\, x \not\equiv y$$

ou bien

$$x\,\mathrm{E}\,y \iff \vdash \lnot\lnot\, x \not\equiv \lnot\lnot\, y$$

etc.

3° Le Théorème 22.3 est une généralisation du résultat que j'avais annoncé dans une Note précédente (PORTE 1960.*a*), lequel ne concernait que les systèmes connectifs (voir la définition de ces systèmes au Chapitre 9); mais tous les exemples particuliers qui seront étudiés dans le travail présent concernent des systèmes connectifs. Les définitions plus générales qui précèdent ont été données dans le but de permettre une extension éventuelle de mes principaux résultats à diverses formes du « calcul des prédicats ».

23. Définitions formelles.

DÉFINITION 23.1. — Dans un système thétique, on appellera « *fonction définitionnelle* » pour le symbole s, ou encore « *définition formelle* » de s, toute application, δ, de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ telle que :

1° Si la formule x contient le symbole s, $\delta(x)$ ne contient pas s.

2° Si la formule x ne contient pas s, alors $\delta(x) = x$.

3° Pour toute formule x et toute fonction de concaténation unaire, f, on a

$$f(x) \ \mathrm{E} \ \delta(f(x)),$$

E étant la congruence maximum.

COMMENTAIRES :

1° L'expression de « définition formelle » devra être considérée comme un tout indécomposable, qui s'oppose au mot « définition » de la même façon que « thèse » s'oppose à « théorème » (voir ci-dessus § 7).

2° Une notion abstraite de « définition formelle » était nécessaire pour donner un sens précis aux résultats négatifs tels que celui de MCKINSEY 1939 exprimant que tel symbole « n'est pas définissable » dans tel système (voir plus loin Ch. 14).

3° La définition précédente a son origine dans ROSENBLOOM 1950, CURRY 1958 et AJDUKIEWICZ 1958. Elle est différente des notions définies par Rosenbloom et par Ajdukiewicz en ce qu'elle s'applique à des systèmes thétiques et non à des systèmes logistiques ou déductionnels. D'autre part, ces auteurs n'utilisaient pas la notion de congruence. Ma notion dérive plus directement des travaux de Curry; elle en diffère parce que Curry donne à l'expression de « systèmes formels » un sens assez différent de celui que j'ai adopté; d'autre part, Curry construit sa notion de définition de telle façon que les « définitions par récurrence » en fassent partie de façon évidente, ce que j'ai préféré éviter.

4° Ce qu'on appelle généralement « théorème d'élimination » a été inclus directement dans la Définition 23.1.

5° On trouvera des exemples d'applications de la Définition 23.1 dans la suite du travail présent. Ces exemples seront toujours empruntés à des systèmes connectifs. La généralisation proposée ici a pour but des applications éventuelles à diverses formes de « calculs des prédicats ».

CHAPITRE 9.

SYSTÈMES CONNECTIFS. FONCTIONS CONNECTIVES.

24. Généralités.

Les systèmes connectifs sont une classe particulière de systèmes formels; ils sont logistiques, déductionnels ou thétiques. On commencera par étudier les systèmes connectifs thétiques.

DÉFINITION 24.1. — Soit $\mathcal{S} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{E}, \mathfrak{R} \rangle$ un système thétique, on dira que c'est un système connectif s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) L'alphabet se divise en deux ensembles disjoints, à savoir, d'une part, l'ensemble des *atomes*, d'autre part, l'ensemble des *connecteurs*. Chacun de ces deux ensembles n'est pas vide. Les connecteurs sont eux-mêmes classés en espèces : les connecteurs 0-aires, 1-aires, etc., n-aires, etc. (L'explication de cette terminologie se trouve dans la condition suivante.)

(2) Les formules constituent le plus petit ensemble de mots qui contient chaque mot constitué d'un seul atome, et tel que si C est un connecteur n-aire et $x_1, \ldots, x_n$ sont des formules quelconques, alors le mot $\langle \mathrm{C} \rangle \, 8 \, x_1 \, 8 \ldots 8 \, x_n$ est également une formule.

REMARQUES :

1° Les mots constitués d'un seul atome sont donc des formules, qui seront appelées « *formules atomiques* ».

2° Les mots constitués d'un seul symbole qui est un connecteur 0-aire, sont également des formules. Jusqu'à maintenant, rien ne différencie les connecteurs 0-aires des atomes; ils seront différenciés par les Définitions 24.2 et suivantes.

3° La définition précédente ne précise pas le nombre des atomes ni le nombre des connecteurs. Dans ce qui suit et sauf mention expresse du contraire, je supposerai que les atomes sont en infinité dénombrable et que les connecteurs sont en nombre fini; mais la plupart des résultats

pourraient être généralisés à d'autres cas (exemple : atomes en nombre fini, ou non dénombrable, connecteurs en nombre infini, etc.). Quelques-uns des résultats établis dans la suite du travail présent ne sont valables que dans le cas où il n'y a pas de connecteur o-aire : voir, en particulier, Ch. 12.

4° Les calculs connectifs ont été considérés dans la littérature de façon très générale et à plusieurs reprises sous le nom de « calculs propositionnels » (voir par exemple Łoś 1949 ou encore Harrop 1958); ils sont appelés « simples languages » dans Rosenbloom 1950, Ch. 4. Certains des systèmes formels étudiés dans les textes qui viennent d'être cités en référence n'ont que des rapports lointains avec le calcul propositionnel classique. Même certains systèmes de « logique combinatoire » dus à Curry ou à ses successeurs sont des systèmes connectifs.

Théorème 24.1. — Définissons le *poids* $\pi(a)$ d'un mot a de la façon suivante : le poids d'un atome est -1 ; le poids d'un connecteur n-aire est $n-1$; le poids d'une formule constituée d'un seul symbole est le poids de ce symbole; $\pi(a_1 \S a_2) = \pi(a_1) + \pi(a_2)$ pour tous mots a_1, a_2; $\pi(\emptyset) = 0$ — alors, le mot a est une formule si et seulement si il satisfait aux deux conditions suivantes :

$$(1)\quad \pi(a) = -1;$$
$$(2)\quad a = a_1 \S a_2 \wedge a_2 \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \pi(a_1) \geqq 0.$$

Ce théorème est classique. Sa démonstration est à la fois élémentaire et longue, je ne la reproduirai pas (voir Rosenbloom 1950, p. 154-157) ([24.1]).

Théorème 24.2. — *Soient x, y, y' des formules. Si x contient une ou plusieurs occurrences de y comme sous-formules, et si x' est le mot obtenu en remplaçant dans x une occurrence particulière de y par y', alors x' est également une formule.* — C'est une conséquence immédiate du Théorème 24.1 : en effet, $\pi(y) = \pi(y') = -1$, donc $\pi(x') = \pi(x)$ et si x est une formule, il en est de même de x'.

Définition 24.2. — Dans un système connectif, on appelle *substitutions* les applications de l'ensemble des formules, $\mathcal{F}$, dans $\mathcal{F}$:

$$S^{q_1 \dots q_i \dots q_k}_{a_1 \dots a_i \dots a_k}$$

où les q_i sont des atomes quelconques et où les a_i sont des formules quelconques et qui sont telles que, si

$$x' = S^{q_1 \dots q_i \dots q_k}_{a_1 \dots a_i \dots a_k} x$$

([24.1]) On peut aussi remarquer que la propriété est évidente pour les formules minimales (qui sont constituées d'un seul symbole) et qu'elle est conservée par les règles de construction des formules.

alors x' est le mot qui résulte de x en remplaçant dans x simultanément toutes les occurrences de q_i par a_i (pour $1 \leq i \leq k$).

Une substitution est dite *simple* si $k = 1$, et *multiple* si $k > 1$.

THÉORÈME 24.3. — *Si x est une formule quelconque et σ une substitution quelconque, alors σx est également une formule* ([24.2]).

Démonstration. — D'après le Théorème 24.2 et par récurrence sur les occurrences des atomes substitués.

DÉFINITION 24.3. — Un système thétique connectif sera dit « *substitutif* » si $\vdash x \Rightarrow \vdash \sigma x$ pour toute formule x et toute substitution σ.

REMARQUES :

1° Sauf mention expresse du contraire, les systèmes connectifs qui seront étudiés à la suite du travail présent seront toujours substitutifs.

2° La définition précédente permet de différencier, en général, les connecteurs o-aires et les atomes. En effet, il y a des exemples classiques de systèmes connectifs comportant un connecteur o-aire et tels que la substitution d'une formule quelconque pour toutes les occurrences de ce connecteur dans une thèse ne soient pas une thèse (voir p. ex. CHURCH 1956, Ch. 1).

3° On démontre classiquement ([24.3]) que dans un système possédant une infinité d'atomes les substitutions multiples sont des fonctions composées d'un nombre fini de substitutions simples. Ceci est un exemple d'une propriété qui cesse d'être vraie dans les cas où il y a un nombre fini d'atomes. Par exemple, soit un système dont l'alphabet se réduit à un connecteur binaire C et deux atomes, p_1, p_2; on a alors

$$S^{p_1 p_2}_{p_2 p_1} C p_1 p_2 = C p_2 p_1.$$

Or, les substitutions ne peuvent pas raccourcir les formules; de plus dans le cas présent les seules substitutions qui n'allongent pas la formule en question sont celles qui substituent des atomes aux atomes; les seules substitutions simples à posséder cette propriété sont :

$$S^{p_1}_{p_2} \quad \text{et} \quad S^{p_2}_{p_1},$$

mais

$$S^{p_1}_{p_2} C p_1 p_2 = C p_2 p_2$$

et

$$S^{p_2}_{p_1} C p_1 p_2 = C p_1 p_1;$$

([24.2]) Je rappelle que j'écris indifféremment « σx » ou « $\sigma(x)$ » (voir § 10).

([24.3]) Voir CHURCH 1956, § 12.

or, si l'on applique de nouveau les mêmes substitutions simples, les formules résultantes ne comprendront plus jamais que des occurrences d'un seul atome. On n'obtiendra donc jamais Cp_2p_1.

4° Rien n'a été dit jusqu'ici sur la numérotation de l'alphabet, elle peut donc être quelconque, mais si on la change, même sans rien changer d'autre au système, on change le système. Dans ce qui suit, je supposerai, sauf mention explicite du contraire, que les atomes sont les premiers symboles.

5° Dans ce qui suit, je représenterai le plus souvent les atomes par « p_1 », « p_2 », etc. avec $j = \mathfrak{N}(p_j)$. Quand je voudrai parler d'un atome quelconque, sans préciser son numéro, j'utiliserai le plus souvent les lettres « q », « r » et « s », munies éventuellement d'indices, les connecteurs seront généralement désignés par des capitales romaines, « C », « D », etc., ou bien par des signes spéciaux. Bien entendu ces notations n'ont rien d'obligatoire même dans la suite du travail présent.

6° A partir de maintenant, dans la notation des formules, j'emploierai systématiquement les notations simplifiées décrites plus haut (§ 9).

7° Dans le but de rendre certaines écritures plus claires, je placerai souvent en « infixe » le signe désignant un connecteur binaire, et j'utiliserai des parenthèses quand ce sera nécessaire pour éviter toute ambiguïté; ainsi j'écrirai « $x \supset y$ » au lieu de « $\supset xy$ », et « $x \supset (y \supset x)$ » au lieu de « $\supset x \supset yx$ ». Il est clair que les parenthèses utilisées dans ce cas ne désignent aucun symbole des systèmes formels étudiés.

8° Il existe dans la littérature des systèmes formels identiques aux calculs connectifs, avec la seule différence que les connecteurs binaires sont placés réellement entre leurs deux arguments, et qu'il existe deux symboles supplémentaires appelés « parenthèses formelles »; voir p. ex. Church 1956, Ch. 1. En fait, c'est même de cette façon que sont définis la plupart des systèmes de « calculs propositionnels » (classiques ou autres). Par abus de langage, j'appellerai ces systèmes des « systèmes connectifs »; ils ne satisfont pas aux conditions de la Définition 24.1, mais on peut les traduire de façon très simple en de véritables systèmes connectifs satisfaisant aux conditions de la Définition 24.1.

25. **Fonctions connectives.**

Définition 25.1. — Dans un système connectif dont les connecteurs sont $C_1, \ldots, C_m$, respectivement à $i_1, \ldots, i_m$ arguments ([25.1]), on appellera

([25.1]) Cette définition peut s'étendre aux connecteurs o-aires; les fonctions connectives génératrices seront alors des constantes (voir § 10).

« *fonctions connectives génératrices* » les fonctions $\Phi_{C_1}, \ldots, \Phi_{C_m}$ définies par

$$\Phi_{C_k}(x_1, \ldots, x_{i_k}) = C_k x_1, \ldots, x_{i_k}$$

pour $1 \leq k \leq m$ et pour toutes formules $x_1, \ldots, x_{i_k}$.

Remarque. — Par abus de langage, on peut confondre les fonctions génératrices avec les connecteurs auxquels elles sont associées. Mais il faut se rappeler que ce n'est là qu'un abus de langage et que l'étude des calculs connectifs peut devenir à peu près incompréhensible, dans certains cas, si l'on n'a fait aucune distinction entre C et Φ_C (voir p. ex. Rosser-Turquette 1952, pp. 11 et 31).

Définition 25.2. — On appellera « *fonctions connectives* » les fonctions qui appartiennent au plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions connectives génératrices ainsi que les fonctions projections de l'ensemble des formules, qui soit stable pour les superpositions normales.

Théorème 25.0. — *Pour toute fonction connective n-aire f (n quelconque), il existe une fonction connective génératrice g (k-aire) et k fonctions connectives n-aires $h_1, \ldots, h_k$ telles que, pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n$, on a*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$$

excepté si f est une fonction projection.

En effet, la propriété énoncée par le théorème est évidemment satisfaite par les fonctions connectives génératrices et par les fonctions projections; cette propriété étant conservée par les superpositions normales, elle est satisfaite par toutes les fonctions connectives.

Commentaires :

1° Le théorème précédent pourrait servir de définition des fonctions connectives, et alors la Définition 25.2 deviendrait un théorème qui se démontrerait par récurrence.

2° Lorsque *f* est donnée, les fonctions g, $h_1, \ldots, h_k$ sont déterminées de façon unique. En recommençant à appliquer le Théorème 25.0 à chacune de ces fonctions, on obtient un arbre, dont les points terminaux sont des fonctions génératrices ou des fonctions projections. On peut dire que cet arbre représente la « construction » de la fonction *f*. Il s'ensuit que si une propriété est satisfaite par les fonctions connectives génératrices et par les fonctions projections, elle est satisfaite par toute fonction connective. Quand le Théorème 25.0 sera ainsi utilisé pour démontrer une propriété pour toutes les fonctions connectives, je dirai simplement qu'elle est démontrée « par récurrence sur la construction des fonctions connectives ».

DÉFINITION 25.3. — On appellera « *fonctions quasi-connectives* » les fonctions qui appartiennent au plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions connectives génératrices ainsi que les fonctions projections et les fonctions constantes, qui soit stable pour les superpositions normales.

THÉORÈME 25.1. — *Toute fonction connective est permutable avec toute substitution* — c'est-à-dire que, si f est une fonction connective n-aire et σ une substitution, alors

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n)$$

pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n$ ([25.2]).

Démonstration. — La propriété est évidente par construction pour les fonctions connectives initiales ainsi que pour les fonctions projections; elle est conservée par les substitutions, d'où le Théorème 25.1 par récurrence sur la construction des fonctions connectives.

THÉORÈME 25.2. — *Si l'on fixe un ou plusieurs arguments d'une fonction quasi-connective, on obtient encore une fonction quasi-connective.*

Il s'agit de démontrer que, f étant une fonction quasi-connective et les x_i, y_j étant des formules quelconques, alors la fonction $f_{y_1 \ldots y_k}$ définie par

$$f_{y_1 \ldots y_k}(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)$$

est quasi-connective. Il suffit de remarquer que

$$f_{y_1 \ldots y_k}(x_1, \ldots, x_m) = f(\mathrm{P}_1^m(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathrm{P}_m^m(x_1, \ldots, x_m), \mathrm{K}_{y_1}^k(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \mathrm{K}_{y_k}^k(x_1, \ldots, x_m))$$

et de se rapporter à la Définition 25.3 ([25.3]).

THÉORÈME 25.3. — *Si x est une formule et que tous les atomes qui ont des occurrences dans x sont des éléments de l'ensemble $\{q_1, \ldots, q_n\}$, alors il existe une fonction connective f telle que $x = f(q_1, \ldots, q_n)$.*

En effet, d'une part pour un atome q_i ($1 \leq i \leq n$), on a

$$q_i = \mathrm{P}_i^n(q_1, \ldots, q_n)$$

d'autre part, si C est un connecteur k-aire, on a

$$\mathrm{C}x_1 \ldots x_k = \Phi_{\mathrm{C}}(x_1, \ldots, x_k),$$

([25.2]) Ce résultat peut être généralisé pour les fonctions o-aires (voir § 10).

([25.3]) Les fonctions P_n^m sont les fonctions projections, et les fonctions K_n^k sont les fonctions constantes (voir § 10).

de sorte que si la propriété est vraie pour chacune des sous-formules $x_1, \ldots, x_k$, elle est vraie pour la formule $Cx_1 \ldots x_k$; d'où le théorème par récurrence sur les sous-formules ([25.4]).

THÉORÈME 25.4. — *Si la formule u' a été obtenue, à partir de la formule u, en y remplaçant une occurrence de la sous-formule x par une autre formule x', alors, il existe une fonction connective $(n+1)$-aire f $(n \geq 0)$ et éventuellement (si $n > 0$) des formules $z_1, \ldots, z_n$ telles que*

$$u = f(x, z_1, \ldots, z_n) \qquad \text{et} \qquad u' = f(x', z_1, \ldots, z_n).$$

En effet, soient $q_1, \ldots, q_n$ les atomes ayant une occurrence au moins dans u et soit r un autre atome; soit w la formule obtenue à partir de u en y remplaçant par r l'occurrence de x en question. D'après le Théorème 25.3, il existe une fonction connective f telle que

$$w = f(r, q_1, \ldots, q_n),$$

d'où

$$u = \mathrm{S}^r_x w = f(x, q_1, \ldots, q_n)$$

et

$$u' = \mathrm{S}^r_{x'} w = f(x', q_1, \ldots, q_n)$$

par application du Théorème 25.1. On a donc construit un exemple satisfaisant aux conditions de l'énoncé. On remarquera que dans cet exemple les formules $z_1, \ldots, z_n$ sont atomiques.

THÉORÈME 25.5. — *Si x, x', u, u' sont comme dans l'énoncé du Théorème 25.4, alors il existe une fonction quasi-connective g telle que $u' = g(x')$.*

C'est une conséquence immédiate des Théorèmes 25.4 et 25.2.

THÉORÈME 25.6. — *Il existe des fonctions quasi-connectives qui ne sont pas permutables avec les substitutions.*

Il suffit de donner un exemple : soit un système connectif contenant au moins deux atomes différents q, r, on a alors

$$\mathrm{S}\mathcal{J}\,\mathrm{K}^r_q r = \mathrm{S}\mathcal{J}\, q = r,$$

mais

$$\mathrm{K}^r_q\,\mathrm{S}\mathcal{J}\, r = \mathrm{K}^r_q r = q.$$

THÉORÈME 25.7. — *Dans un système connectif les fonctions quasi-connectives sont identiques aux fonctions de concaténation.*

D'une part, il est évident que les fonctions connectives génératrices sont des fonctions de concaténation; d'où il suit, en comparant les Définitions 25.3 et 22.2, que toute fonction quasi-connective est une fonction

---

([25.4]) Ce résultat peut être généralisé dans le cas où il existe des connecteurs 0-aires

de concaténation. D'autre part, pour démontrer la réciproque, il suffira de démontrer que les fonctions $Q_{a_1 \ldots a_{m-1}}$ (voir Déf. 22.2) sont des fonctions quasi-connectives. Or, soient $r_1, \ldots, r_k$ les atomes qui ont des occurrences dans les mots $a_1, \ldots, a_{m+1}$, et soient $q_1, \ldots, q_m$, m atomes différents des $r_1, \ldots, r_k$. On a alors

$$\begin{aligned} Q_{a_1 \ldots a_{m+1}}(x_1, \ldots, x_m) &= a_1 x_1 a_2 \ldots a_m x_m a_{m+1} \\ &= S^{q_1 \ldots q_m}_{x_1 \ldots x_m} a_1 q_1 a_2 \ldots a_m q_m a_{m+1} = \sigma y, \end{aligned}$$

avec $\sigma = S^{q_1 \ldots q_m}_{x_1 \ldots x_m}$ et

$$y = a_1 q_1 a_2 \ldots a_m q_m a_{m+1}.$$

D'après le Théorème 25.4, il existe une fonction connective f telle que

$$y = f(q_1, \ldots, q_m, r_1, \ldots, r_k)$$

d'où, d'après le Théorème 25.1,

$$\sigma y = f(x_1, \ldots, x_m, r_1, \ldots, r_k)$$

et enfin, d'après le Théorème 25.2, il existe une fonction quasi-connective g telle que

$$\sigma y = g(x_1, \ldots, x_m).$$

Comme ceci est vrai quels que soient $x_1, \ldots, x_n$, il s'ensuit que

$$g = Q_{a_1 \ldots a_{m+1}}$$

ce qui suffit à démontrer le théorème.

Remarques :

1° Les théorèmes principaux du paragraphe présent sont les Théorèmes 25.1, 25.7 et 25.6, qui énoncent les propriétés fondamentales de l'ensemble des fonctions connectives, de l'ensemble des fonctions quasi-connectives, et le fait que ces deux ensembles sont différents.

2° Les démonstrations des Théorèmes 25.1-25.7, telles qu'elles ont été présentées ici, supposent qu'il existe une infinité d'atomes dans les systèmes connectifs étudiés. Cette hypothèse forte permet d'obtenir des démonstrations rapides; mais il se peut qu'elle soit trop forte, en ce sens que certains des théorèmes en question sont peut-être vrais pour des systèmes ne contenant qu'un nombre fini d'atomes. Ceci est un problème ouvert.

3° Les fonctions connectives et les fonctions quasi-connectives ont été définies plusieurs fois dans la littérature pour des systèmes connectifs particuliers. Ainsi pour les systèmes modaux (voir plus loin Ch. 14) les fonctions connectives sont souvent appelées « fonctions

modales » ([25.5]). Dans le cas du calcul propositionnel classique, et par abus de langage, on appelle quelquefois « fonctions booliennes » tantôt les fonctions connectives, tantôt les fonctions quasi-connectives. Je ne connais aucun texte qui distingue clairement les fonctions connectives des fonctions quasi-connectives.

Pour quelques applications particulières, les notions et les résultats qui suivent sont utiles.

DÉFINITION 25.4. — Soit f une fonction n-aire et $1 \leq i \leq n$, nous dirons :

1° que l'argument x_i est *muet* dans f si

$$\forall x_i \forall x_i' (f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n));$$

2° que la fonction f *dépend complètement* de l'argument x_i (ou encore de son i-ième argument) si

$$x_i \neq x_i' \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n).$$

THÉORÈME 25.8. — *Dans une fonction connective, ou bien un argument est muet, ou bien la fonction en dépend complètement.*

En effet, soit f une fonction connective n-aire et $q_1, \ldots, q_n$ des atomes distincts les uns des autres. Posons

$$\sigma = S^{q_1 \ldots q_i \ldots q_n}_{x_1 \ldots x_i \ldots x_n},$$

on a alors

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \sigma f(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n).$$

Mais $f(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n)$ est une formule; si cette formule ne contient pas q_i alors le i-ième argument est muet dans f; si, au contraire, cette formule contient q_i, la fonction f dépend complètement de son i-ième argument.

THÉORÈME 25.9. — *Si, dans une fonction connective, on fixe un argument* (voir Thm. 25.2), *alors on obtient une fonction connective si et seulement si cet argument était muet.*

En effet, avec les notations du théorème précédent, σ' étant une substitution quelconque, et en appliquant le Théorème 25.1 et les notations du Théorème 25.2, on a

$$\begin{aligned} &\sigma' f_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ &= f_{x_i}(\sigma' x_1, \ldots, \sigma' x_{i-1}, \sigma' x_{i+1}, \ldots, \sigma' x_n) \\ &= f(\sigma' x_1, \ldots, \sigma' x_{i-1}, \sigma' x_i, \sigma' x_{i+1}, \ldots, \sigma' x_n) \\ &= f(\sigma' x_1, \ldots, \sigma' x_{i-1}, x_i, \sigma' x_{i+1}, \ldots, \sigma' x_n). \end{aligned}$$

([25.5]) Voir p. ex. ROSENBLOOM, 1952, p. 61.

En comparant les deux derniers membres de cette égalité, en tenant compte du fait que σ' est une substitution quelconque, de sorte que, en général, $x_i \neq \sigma' x_i$ et en appliquant le Théorème 25.8, on voit que le i-ième argument de f est muet.

DÉFINITION 25.4. — On appellera « *fonctions ultra-connectives* » les fonctions qui appartiennent au plus petit ensemble contenant les fonctions connectives initiales et la fonction identité qui soit stable pour toutes les superpositions.

THÉORÈME 25.10. — *Les fonctions ultra-connectives sont les fonctions connectives qui dépendent de tous leurs arguments.*

Il est évident que les fonctions ultra-connectives dépendent de tous leurs arguments. En effet, la propriété est vraie pour les fonctions connectives génératrices ainsi que pour la fonction identité, et elle est conservée par les superpositions.

Réciproquement, la propriété est évidente pour la fonction identité. Soit maintenant f une fonction ultra-connective n-aire. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des formules et si $q_1, \ldots, q_n$ sont des atomes qui n'ont pas d'occurrence dans les formules $x_1, \ldots, x_n$, alors en posant

$$\sigma = S^{q_1 \ldots q_n}_{x_1 \ldots x_n},$$

on aura (d'après le Théorème 25.1)

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma f(q_1, \ldots, q_n).$$

Mais, $f(q_1, \ldots, q_n)$ est une formule qui contient exactement les atomes $q_1, \ldots, q_n$. Il s'ensuit qu'il existe un entier m, un connecteur m-aire C et des formules $y_1, \ldots, y_n$, tels que

$$f(q_1, \ldots, q_n) = C y_1 \ldots y_m$$

et tels que, pour chaque q_i, l'une au moins des formules $y_1, \ldots, y_m$ dépend complètement de q_i. Or, d'après le Théorème 25.3,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = C(\sigma y_1) \ldots (\sigma y_m)$$

et l'une au moins des formules $\sigma y_1, \ldots, \sigma y_m$ dépend complètement de x_i. Il existe donc m fonctions ultra-connectives $g_1, \ldots, g_m$, respect. k_1-aire, $\ldots$, k_m-aire, telles que, pour $1 \leq i \leq m$, et des formules $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$, telles que $\sigma y_i = g_i(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k})$. Mais les formules $y_1, \ldots, y_m$ sont chacune plus courtes que la formule $f(q_1, \ldots, q_m)$. En répétant cette construction un nombre fini de fois, on arrivera donc à des formules atomiques. Cela revient à faire à l'envers la construction de la fonction f à l'aide des fonctions connectives génératrices et de la fonction identité par superposition; il s'ensuit que f est ultra-connective.

REMARQUE. — Les fonctions ultra-connectives ont été utilisées dans ma Note PORTE 1962 (voir plus loin Ch. 13).

En vue d'autres applications, il est intéressant de généraliser les substitutions.

DÉFINITION 25.5. — On appellera « *fonctions contra-connectives* » les fonctions unaires permutables avec toutes les fonctions connectives (comparer avec le Théorème 25.1).

REMARQUE. — Cette définition sera encore généralisée plus loin. En comparant deux systèmes connectifs, on définira les « traductions contra-connectives » (voir Ch. 12). De plus, on verra plus loin (Ch. 11) que les assignations d'un système connectif dans une évaluante ont des propriétés analogues à celles des fonctions contra-connectives.

26. Axiomatisation des systèmes connectifs.

Nous avons défini plus haut les systèmes thétiques connectifs. Les deux définitions suivantes étendent de façon naturelle le sens de l'expression « systèmes connectifs ».

DÉFINITION 26.1. — Un système déductionnel sera dit connectif s'il engendre un système thétique connectif.

DÉFINITION 26.2. — Un système logistique sera dit connectif s'il engendre un système logique connectif.

Dans ce qui suit nous nous intéresserons plus spécialement à des systèmes logistiques connectifs dont les schémas d'axiomes et les règles de déduction ont des formes spéciales, lesquelles vont être précisées dans les deux définitions suivantes.

DÉFINITION 26.3. — On appellera « *schéma connectif* » l'ensemble des valeurs prises par une fonction connective, c'est-à-dire un ensemble de formules ayant la forme suivante :

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \{ y \mid \exists x_1, \ldots, \exists x_k \, (y = f(x_1, \ldots, x_k)) \},$$

où f est une fonction connective.

DÉFINITION 26.4. — On appellera « *règle connective* » toute relation entre formules ayant la forme suivante :

$$(2) \quad \mathfrak{R}(y_1, \ldots, y_n, z) \iff \exists x_1, \ldots, \exists x_k \, ((y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_k)) \wedge \ldots \wedge (y_n = f_n(x_1, \ldots, x_k)) \wedge (z = g(x_1, \ldots, x_k))).$$

DÉFINITION 26.5. — Un système logistique sera dit « *déterminé connectivement* » si chacun de ses schémas d'axiomes est connectif et si chacune de ses règles de déduction est connective.

Remarque. — Dans la littérature on a utilisé très souvent des systèmes connectifs logistiques déterminés connectivement (voir p. ex. le système P de Church 1956). L'exemple le plus connu de règle de déduction non connective utilisée dans des systèmes logistiques connectifs est la règle de substitution :

$$\mathcal{R}_s(y, z) \iff z = \sigma y,$$

σ étant une substitution quelconque.

Conventions de notations. — Les expressions de la forme (1) ou de la forme (2), utilisées plus haut, sont conformes aux conventions générales de notations exposées au Chapitre 2, mais sont trop lourdes pour être réellement pratiques. Dans ce qui suit, on leur substituera régulièrement les notations suivantes :

(3) $\mathfrak{A}$: $\vdash f(x_1, \ldots, x_k)$;

(4) $\mathcal{R}$: $f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_k) \models g(x_1, \ldots, x_k)$.

Pour que cette notation soit correcte, il est essentiel que les noms des schémas d'axiomes ou des règles soient écrits; par exemple, si l'on supprimait dans (3) la lettre « $\mathfrak{A}$ » on énoncerait une propriété de l'ensemble des thèses du système en question, mais on n'aurait pas décrit un schéma d'axiomes; de même, si dans (4) on supprimait le nom de la règle, il ne resterait plus que la description d'une propriété de la déductibilité du système en question.

CHAPITRE 10.

CONGRUENCES DES SYSTÈMES CONNECTIFS.

27. — Les congruences des systèmes formels ont été définies plus haut (§ 22). Dans le cas des systèmes thétiques, il y a des résultats et des définitions qui se simplifient, et de plus il se pose certains problèmes nouveaux.

THÉORÈME 27.1. — *Une relation binaire* E *est une congruence si elle satisfait aux trois conditions suivantes :*

1° *C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formules.*

2° *Pour toute fonction quasi-connective g et toutes formules x et y, on a*

$$x \mathrm{E} y \Rightarrow g(x) \mathrm{E} g(y).$$

3° *Pour toutes formules x et y on a*

$$x \mathrm{E} y \wedge \vdash x \Rightarrow \vdash y.$$

C'est une conséquence immédiate de la Définition 22.1 et du Théorème 25.7.

REMARQUES :

1° On peut remplacer la deuxième condition du Théorème 27.1 par la suivante : Pour chaque fonction connective f et toutes formules $x, y, z_1, \ldots, z_n$ on a

$$x \mathrm{E} y \Rightarrow f(x, z_1, \ldots, z_n) \mathrm{E} f(y, z_1, \ldots, z_n).$$

2° En raisonnant par récurrence sur la construction des fonctions quasi-connectives, on peut remplacer la deuxième condition du Théorème 27.1 par ses cas particuliers concernant les fonctions connectives génératrices, c'est-à-dire en fait les connecteurs; ainsi par exemple, s'il n'y a qu'un seul connecteur binaire C la condition se réduit à

$$x \mathrm{E} y \Rightarrow \mathrm{C} x z \, \mathrm{EC} y z,$$
$$x \mathrm{E} y \Rightarrow \mathrm{C} z x \, \mathrm{EC} z y$$

pour toutes formules x, y, z. Cette méthode se généralise de façon évidente dans le cas où il existe plusieurs connecteurs. Elle aboutit à un nombre fini de conditions simples s'il y a un nombre fini de connecteurs.

La définition suivante est un cas particulier de la Définition 22.3.

DÉFINITION 27.1. — Une congruence E sera dite « *déterminée connectivement* » (respect. « déterminée quasi-connectivement ») s'il existe une fonction connective (respect. quasi-connective) f telle que

$$x \mathrm{E} y \iff \vdash f(x, y).$$

DÉFINITION 27.2. — Une congruence E sera dite « *déterminée pluri-connectivement* » s'il existe plusieurs fonctions connectives $f_1, \ldots, f_n$ telles que

$$x \mathrm{E} y \iff \vdash f_1(x, y) \wedge \ldots \wedge \vdash f_n(x, y)$$

pour toutes formules x, y ([27.1]).

THÉORÈME 27.2. — *Si une congruence est déterminée connectivement, quasi-connectivement, ou pluri-connectivement, c'est la congruence maximum.* — C'est un cas particulier du Théorème 22.3.

THÉORÈME 27.3. — *Les quatre cas possibles* a priori, *énoncés ci-dessous, sont réalisés effectivement dans certains systèmes connectifs :*

(1) *Il existe plusieurs congruences et l'une d'elles est déterminée connectivement.*

(2) *Il n'existe qu'une seule congruence (l'égalité) et elle est déterminée connectivement.*

(3) *Il existe plusieurs congruences et aucune n'est déterminée connectivement.*

(4) *Il n'existe qu'une seule congruence (l'égalité) et elle n'est pas déterminée connectivement.*

Démonstration. — Il suffit de donner un exemple de chaque cas.

(1) Un système quelconque pour le calcul propositionnel classique (voir Ch. 13). La congruence maximum E est déterminée connectivement par $x \mathrm{E} y \iff \vdash x \not\equiv y$ et il y a d'autres congruences que l'égalité, puisque, par exemple, $\vdash x \not\equiv \neg\neg x$ pour toute formule x.

(2) Un système thétique connectif contenant en plus des atomes un seul connecteur binaire C; les thèses sont les formules de la forme $\mathrm{C}xx$. Il est évident que $x = y \iff \vdash \mathrm{C}xy$.

([27.1]) En remplaçant dans cette définition les fonctions connectives par des fonctions quasi-connectives, on peut définir des congruences « déterminées pluri-quasi-connectivement ».

(3) Un système thétique connectif contenant en plus des atomes un seul connecteur binaire C; les thèses sont les formules de la forme Cxy où x et y sont des formules quelconques (il en résulte que les seules formules qui ne sont pas des thèses sont les formules atomiques). Il est facile de voir que la relation binaire E définie par

$$x \mathrm{E} y \iff (\vdash x \wedge \vdash y) \vee (\neg \vdash x \wedge \neg \vdash y)$$

est la congruence maximum et qu'elle est différente de l'identité. Pour démontrer que E n'est pas déterminable connectivement, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction connective f telle que $x \mathrm{E} y = \vdash f(x, y)$; il est évident que f ne peut pas être une fonction projection; il s'ensuit que la formule $f(x, y)$ est toujours de la forme Cab, a et b étant des formules; il s'ensuivrait que deux formules quelconques x et y seraient congrues, ce qui est impossible.

(4) Un système thétique connectif contenant en plus des atomes un seul connecteur binaire $\supset$, que j'écrirai en infixe ([27.2]); les thèses sont les formules des formes

$$y \supset (x \supset y),$$
$$z_n \supset (z_{n-1} \supset (\ldots \supset (z_1 \supset (y \supset (x \supset y))))).$$

L'égalité est définissable par une fonction quasi-connective, car si q et r sont deux atomes distincts, on a

$$x = y \iff \vdash (x \supset q) \supset (r \supset (y \supset q)),$$

de sorte que l'égalité est la seule congruence.

Remarquons que, d'après la forme des thèses, pour toute fonction connective binaire dépendant de son premier argument, soit g, on a

$$\vdash a \Rightarrow \vdash g(a, b)$$

pour toutes formules a et b.

Pour démontrer que l'égalité n'est pas déterminable par une fonction connective, raisonnons par l'absurde. Supposons que, f étant une fonction connective,

$$x = y \iff \vdash f(x, y)$$

et soit q_1 et q_2 deux atomes distincts, on aurait

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2) &= f_1(q_1, q_2) \supset f'_2(q_1, q_2) \\ &= f_1(q_1, q_2) \supset (f_2(q_1, q_2) \supset f'_3(q_1, q_2)) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= f_1(q_1, q_2) \supset (f_2(q_1, q_2) \supset \ldots (f_{k-1}(q_1, q_2) \supset f_k(q_1, q_2)) \ldots), \end{aligned}$$

où $f_1(q_1, q_2)$, etc. sont des sous-formules de la formule $f(q_1, q_2)$.

([27.2]) Ce système est une partie du CII qui sera définie plus loin, § 40.

Ces sous-formules étant de plus en plus courtes, il arrive un moment où l'on trouve une formule atomique, celle qui a été appelée $f_k(q_1, q_2)$. En appliquant la remarque faite ci-dessus, k fois, on trouverait $\vdash f(q_1, q_2)$, ce qui est impossible.

Remarques :

1° Dans le cas (3), un raisonnement très analogue à celui qui a été donné plus haut, montrerait que la congruence maximum ne peut même pas être déterminée quasi-connectivement.

2° La plupart des exemples utilisés pour démontrer le Théorème 27.3 sont artificiels. On verra des exemples plus naturels dans les Chapitres 13 et 14.

3° On verra aussi au Chapitre 14, par l'exemple dit « calcul implicationnel classique », que dans certains cas la congruence maximum (distincte de l'égalité) est déterminée « pluri-connectivement » sans pouvoir être déterminée connectivement.

4° Dans l'exemple étudié pour le cas (4) du Théorème 27.3, l'égalité n'était pas déterminée connectivement, mais elle était déterminée quasi-connectivement. Il en est de même pour tous les exemples dont j'ai eu connaissance et qui entrent dans le même cas.

La dernière de ces remarques m'amène à énoncer le premier des problèmes ouverts sur lesquels je veux attirer l'attention.

Problème 1. — *Quand l'égalité est la seule congruence, est-elle toujours déterminée quasi-connectivement* ?

La fin du paragraphe présent est consacrée à la définissabilité formelle des connecteurs.

Définition 27.3. — Dans un système connectif, dont E est la congruence maximum, on dira que le connecteur k-aire C est définissable « *normalement* », s'il existe une fonction connective g, construite sans C, et telle que $Cx_1 \ldots x_k Eg(x_1, \ldots, x_k)$ pour toutes formules $x_1, \ldots, x_k$.

Remarque. — D'après la Définition 23.1, il est évident que si un connecteur est définissable normalement, alors il existe une définition formelle de ce connecteur. On verra au Chapitre 13 que dans le cas du calcul propositionnel classique, la notion de connecteur définissable normalement est bien adéquate à la notion intuitive de « connecteur définissable ».

Théorème 27.4. — *Si la congruence maximum est déterminable connectivement, elle est compatible avec toutes les substitutions.* — Autrement dit

si E est la congruence maximum, x et y des formules quelconques, et σ une substitution quelconque, alors on a

$$x\mathrm{E}y \;\Rightarrow\; \sigma x\mathrm{E}\sigma y.$$

En effet, si f est la fonction connective qui détermine E, en utilisant la Définition 27.1 et le Théorème 25.1, on a successivement

$$\begin{aligned} x\mathrm{E}y &\Rightarrow \vdash f(x, y),\\ \vdash f(x, y) &\Rightarrow \vdash \sigma f(x, y),\\ \sigma f(x, y) &= f(\sigma x, \sigma y),\\ \vdash f(\sigma x, \sigma y) &\Rightarrow \sigma x\mathrm{E}\sigma y; \end{aligned}$$

d'où le théorème.

Remarques. — Le théorème précédent peut être étendu au cas des congruences déterminées pluri-connectivement. Mais le théorème suivant montrera qu'il ne peut pas être étendu à toutes les congruences.

Théorème 27.5. — *Il existe des systèmes connectifs où la congruence maximum n'est pas compatible avec toutes les substitutions.*

Il suffit de donner un exemple. On considérera le même système connectif qui avait servi d'exemple pour démontrer le point (3) du Théorème 27.3. Soit q et r deux atomes distincts, et $\sigma = \mathrm{S}^{q}_{\mathrm{C}qr}$, alors $q\mathrm{E}r$ mais $\sigma q = \mathrm{C}qr$ et $\sigma r = r$; donc $\vdash \sigma q$ et $\neg\vdash \sigma r$, d'où $\neg\vdash (\sigma q\mathrm{E}\sigma r)$.

Théorème 27.6. — *Si* C *est un connecteur k-aire* ($k \geqq 1$), *qui est définissable dans un système connectif dont la congruence maximum est déterminée connectivement, alors* C *est définissable normalement.*

En effet, soit $q_1, \ldots, q_k$ des atomes distincts, d'après la Définition 23.1, on aura $\mathrm{C}q_1 \ldots q_k\mathrm{E}a$ où a est une formule qui ne contient pas C. Soit $q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_j$ des atomes distincts parmi lesquels se trouvent tous ceux qui ont des occurrences dans at d'après le Théorème 25.3, il existe une fonction connective f, construite sans C, et telle que

$$a = f(q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_j).$$

Posons maintenant

$$\sigma = \mathrm{S}^{q_1 \ldots q_k r_1 \ldots r_j}_{x_1 \ldots x_k x_1 \ldots x_1}$$

Appliquons maintenant les Théorèmes 27.4 et 25.1, on a

$$\mathrm{C}x_1 \ldots x_k\mathrm{E}f(x_1, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_1),$$

En posant

$$g(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_1),$$

g est une fonction connective k-aire et les conditions de la Définition 27.3 sont satisfaites.

THÉORÈME 27.7. — *Si* C *est un connecteur* o*-aire dans un système connectif dont la congruence maximum* E *est déterminée connectivement, alors il existe une fonction connective unaire g telle que* CEg (x) *pour toute formule* x.

Le raisonnement est le même que pour le Théorème 27.6, avec la différence que les atomes $q_1, \ldots, q_k$ disparaissent et que

$$\sigma = S^{r_1 \ldots r_j}_{x \ldots x}.$$

REMARQUES :

1° On voit que les connecteurs o-aires jouent un rôle un peu spécial.

2° J'ignore si un connecteur définissable formellement est toujours définissable normalement; à cause du Théorème 27.5, la méthode qui a été utilisée pour démontrer le Théorème 27.6 n'est pas applicable dans tous les cas; mais il se pourrait qu'une autre méthode de raisonnement mène au même résultat. La possibilité de généraliser le Théorème 27.6 reste un problème ouvert.

CHAPITRE 11.

ÉVALUANTES ET MODÈLES.

28. Définitions et propriétés générales.

DÉFINITION 28.1. — On appellera « *évaluantes* » toute structure

$$\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_k, \ldots, \mathcal{D} \rangle,$$

où $\mathcal{B}$, l'ensemble de base, est quelconque, $f_1, \ldots, f_k$ sont des fonctions respectivement n_1-aires, n_k-aires, c'est-à-dire des applications de $\mathcal{B}^{n_1}$ dans $\mathcal{B}$, etc. et où $\mathcal{D}$ est une partie quelconque de $\mathcal{B}$. Les f_k sont appelées les « *fonctions d'évaluation génératrices* »; les éléments de $\mathcal{B}$ sont souvent appelés les « valeurs »; les éléments de $\mathcal{D}$ seront appelés les éléments « *distingués* ».

DÉFINITION 28.2. — On appellera « *fonctions d'évaluation* » les fonctions appartenant au plus petit ensemble de fonctions qui comprennent les fonctions d'évaluation génératrices ainsi que les fonctions projections de $\mathcal{B}$ qui soit stable pour les superpositions. Une évaluante sera dite « *pleine* » si, pour chaque entier positif n, toute application de $\mathcal{B}^n$ dans $\mathcal{B}$ est une fonction d'évaluation.

REMARQUES :

1° Les évaluantes sont généralement appelées dans la littérature des « matrices » ou quelquefois des « tables de vérité » (« truth-tables »). J'ai introduit le néologisme « évaluante » parce que les désignations traditionnelles étaient ambiguës (en particulier les évaluantes ne sont pas des matrices, au sens algébrique usuel de ce mot).

2° Les évaluantes pleines sont le plus souvent dites « fonctionnellement complètes ». Je n'ai pas utilisé cette expression car le mot « complet » a beaucoup trop de sens en logique.

3° Il est évident qu'une évaluante ne peut être pleine que si son ensemble de base est fini.

4° Dans tous les cas particuliers intéressants, on a $\mathcal{D} \neq \mathcal{B}$ et $\mathcal{D} \neq \emptyset$; mais les définitions générales sont plus simples si l'on ne fait pas entrer ces conditions dans la définition des évaluantes.

DÉFINITION 28.3. — Si $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_k, \ldots, \mathcal{D} \rangle$ est une évaluante, la structure $\langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_k, \ldots \rangle$ sera dite « *l'algèbre sous-jacente* » de $\mathcal{B}$.

REMARQUE. — Certains auteurs identifient les évaluantes avec leurs algèbres sous-jacentes. Même si l'ensemble des éléments distingués ne change pas pendant le cours d'un raisonnement, il vaut mieux éviter cette identification, car les propriétés générales des évaluantes sont différentes des propriétés générales des algèbres (voir en particulier plus loin la définition des homomorphismes).

DÉFINITION 28.4 :

1° Deux évaluantes

$$\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_k, \ldots, \mathcal{D} \rangle,$$
$$\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}', f'_1, \ldots, f'_k, \ldots, \mathcal{D}' \rangle,$$

seront dites « *homologues* » si elles ont le même nombre de fonctions d'évaluation génératrices et si les fonctions d'évaluation génératrices de même rang ont le même nombre d'arguments dans chacune des deux évaluantes (autrement dit f_1 et f'_1 ont même nombre d'arguments, ..., f_k et f'_k ont même nombre d'arguments, etc.).

2° Une évaluante $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_k, \ldots, \mathcal{D} \rangle$ sera dite « *homologue* » à un système connectif si celui-ci a pour connecteurs $C_1, \ldots, C_k, \ldots$ (dans l'ordre alphabétique) correspondant aux fonctions d'évaluation génératrices, de telle façon que (pour $i = 1, \ldots, k, \ldots$) C_i est n-aire si et seulement si f_i est n-aire ([28.1]).

Lorsque deux évaluantes sont homologues, je dirai aussi que les fonctions d'évaluation génératrices de même rang (f_k et f'_k) sont homologues. Quand une évaluante est homologue à un système connectif, je dirai également que les fonctions d'évaluation génératrices (f_k ci-dessus) sont homologues aux connecteurs correspondants (C_k ci-dessus); je dirai aussi, par abus de langage, que les fonctions d'évaluation génératrices sont homologues aux fonctions connectives génératrices (Φ_{C_k} d'après les notations de la Définition 27.1).

DÉFINITION 28.5. — Étant donné une évaluante, de base $\mathcal{B}$, homologue à un système connectif dont l'ensemble des formules est $\mathcal{F}$, je dirai qu'une fonction d'évaluation f^* est homologue à la fonction connective f si f^* peut être construite, par superposition à partir des fonctions d'éva-

([28.1]) Cette définition peut être généralisée facilement aux cas où il existe des connecteurs o-aires.

luation génératrices et des fonctions projections de $\mathfrak{B}$, de la même façon que f est construite par superposition à partir des fonctions connectives génératrices et des fonctions projections de $\mathcal{F}$.

DÉFINITION 28.6. — Étant donné une évaluante $\mathfrak{M}$, dont l'ensemble de base est $\mathfrak{B}$, qui est homologue à un système connectif $\mathcal{S}$, dont l'ensemble de formules est $\mathcal{F}$, on appellera « *assignation de* $\mathcal{S}$ *dans* $\mathfrak{M}$ » toute application α de $\mathcal{F}$ dans $\mathfrak{B}$ telle que

$$\alpha(C_k x_1, \ldots, x_{n_k}) = f_k(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{n_k})$$

pour chaque connecteur C_k, de $\mathcal{S}$, f_k étant la fonction d'évaluation génératrice homologue à C_k.

On a donc pour les assignations

$$\alpha(\Phi_{C_k}(x_1, \ldots, x_{n_k})) = f_k(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_{n_k}).$$

J'exprimerai cette propriété en disant que α est « *permutable à l'homologie près* » avec Φ_{C_k}.

THÉORÈME 28.1. — *Les assignations sont permutables à l'homologie près avec toutes les fonctions connectives.* — Autrement dit, si α est une assignation, g une fonction connective n-aire, g^* la fonction d'évaluation homologue à g, et $x_1, \ldots, x_n$ des formules quelconques, on a

$$\alpha(g(x_1, \ldots, x_n)) = g^*(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

Démonstration. — Par récurrence sur les constructions parallèles de g et g^*, en tenant compte de la Définition 28.6 et du fait que la propriété est évidente pour les projections.

THÉORÈME 28.2. — *Une assignation est complètement déterminée par les valeurs qu'elle assigne aux formules atomiques.*

En effet, soit x une formule et α une assignation; soit $q_1, \ldots, q_n$ les atomes qui ont des occurrences dans x; d'après le Théorème 25.3 il existe une fonction connective f telle que $x = f(q_1, \ldots, q_n)$; donc d'après le Théorème 28.1, on a

$$\alpha x = f^*(\alpha q_1, \ldots, \alpha q_n)$$

et donc αx est connu si l'on connaît $\alpha q_1, \ldots, \alpha q_n$.

DÉFINITION 28.7. — Soit $\mathcal{S}$ un système connectif et $\mathfrak{M}$ une évaluante homologue :

1° Une formule x de $\mathcal{S}$ sera dite « *valide dans* $\mathfrak{M}$ » si, pour toute assignation α de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{M}$, αx est une valeur distinguée.

2° Une évaluante homologue à un système connectif est appelée « *un modèle* » du système si toutes les thèses du système connectif sont

valides dans l'évaluante. On dira que c'est un « *modèle caractéristique* » du système connectif si les thèses du système sont identiques aux formules valides dans l'évaluante ([28.2]).

REMARQUE. — Si $\mathfrak{M}$ est un modèle caractéristique de $\mathcal{S}$, on dit aussi que $\mathcal{S}$ est « *complet* » par rapport à $\mathfrak{M}$.

DÉFINITION 28.8. — Soit $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ deux évaluantes homologues, ayant respectivement $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ comme bases, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ comme ensembles d'éléments distingués; on appellera « *homomorphisme de* $\mathfrak{M}$ *sur* $\mathfrak{M}$ » toute application h de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(1) h est permutable à l'homologie près avec les fonctions d'évaluation génératrices de $\mathfrak{M}$.

(2) Pour tout élément ξ de $\mathcal{B}$ on a

$$\xi \in \mathcal{D} \iff h\xi \in \mathcal{D}'.$$

S'il existe un homomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$, on dira que $\mathfrak{M}'$ est une « *image homomorphe* » de $\mathfrak{M}$, ou encore que $\mathfrak{M}$ est une « *contre-image homomorphe* » de $\mathfrak{M}'$.

REMARQUES :

1° Si h est un homomorphisme de l'évaluante $\mathfrak{M}$ sur l'évaluante $\mathfrak{M}'$, h est également un homomorphisme (au sens algébrique du mot) de l'algèbre sous-jacent de $\mathfrak{M}$ sur l'algèbre sous-jacent de $\mathfrak{M}'$. Cela résulte immédiatement de la condition (1). Mais, la réciproque est fausse à cause de la condition (2).

2° La remarque précédente est l'un des faits qui nous imposent de distinguer soigneusement une évaluante de son algèbre sous-jacente.

THÉORÈME 28.3. — *Si l'évaluante* $\mathfrak{M}'$ *est une image homomorphe de l'évaluante* $\mathfrak{M}$ *alors toute formule valide dans* $\mathfrak{M}$ *est valide dans* $\mathfrak{M}'$, *et réciproquement. De plus, les règles* T-*valides* (*respect.* D-*valides*) *sont les mêmes dans* $\mathfrak{M}$ *et dans* $\mathfrak{M}'$ ([28.3]).

Démonstration. — Soit $\mathcal{S}$ un système connectif homologue à $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$. Soit maintenant h un homomorphisme fixe de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}'$ et soit α une assignation quelconque de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{M}$. D'après la condition (1) de la Définition 28.8, et la Définition 28.6, la fonction composée $h\alpha$ est une assignation de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{M}'$. En utilisant la condition (2) de la Défi-

---

([28.2]) Il est plus usuel, mais incommode, d'appeler « matrices caractéristiques » les modèles caractéristiques.

([28.3]) Ce dernier point anticipe sur les Définitions 29.1 et 29.2. Je n'en donne pas la démonstration, mais elle est facile.

nition 28.8, on voit facilement que si une formule est valide dans $\mathfrak{M}'$, elle est également valide dans $\mathfrak{M}$.

Pour la réciproque nous allons démontrer que, pour toute assignation α de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{M}'$, il existe une assignation α de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{M}$ telle que $\alpha' = h\alpha$. On utilisera le Théorème 28.2. Soit p_k une formule atomique et posons $\xi'_k = \alpha' p_k$. ξ'_k est un élément de la base de $\mathfrak{M}'$; les homomorphismes étant des applications sur, il existe un élément ξ_k de la base de $\mathfrak{M}$, tel que $\xi'_k = h\xi_k$; les assignations pouvant donner aux formules atomiques des valeurs quelconques, il existe une assignation α_k telle que $\alpha_k p_k = \xi_k$ donc $h\alpha_k p_k = \alpha' p_k$. Appelons α l'assignation telle que $\alpha p_k = \xi_k$ pour tout entier k; cette assignation est complètement déterminée (Thm. 28.2), et l'on a bien par construction $h\alpha p_k = \alpha' p_k$; en utilisant encore le Théorème 28.2, on en conclut que $\alpha' = h\alpha$. Donc, quand α parcourt l'ensemble de toutes les assignations de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{M}$, h restant fixe, α' parcourt l'ensemble de toutes les assignations de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{M}'$. En appliquant de nouveau la condition (2) de la Définition 28.8, il en résulte que si une formule de $\mathscr{S}$ est valide dans $\mathfrak{M}$, elle est également valide dans $\mathfrak{M}'$.

Remarque. — Le contenu du paragraphe 28 est entièrement classique, et il y aura encore beaucoup de résultats classiques dans la suite du Chapitre 11. Voir en particulier Kalicki 1948, 1950.*a*, 1950.*b*, 1952, 1954, également Suszko 1958, Łoś-Suszko 1958 ou encore Harrop 1958. Mais il a été nécessaire de rappeler ici un grand nombre de notions classiques, afin de pouvoir fixer le vocabulaire utilisé dans la suite.

29. Règles, indépendances des schémas d'axiomes et des règles.

La méthode la plus souvent utilisée pour démontrer l'indépendance d'un schéma d'axiomes connectif dans un système connectif, consiste à se servir d'une évaluante dans laquelle le schéma d'axiomes en question n'est pas valide alors que les autres schémas d'axiomes sont valides et que la validité est conservée par les règles.

Des méthodes analogues peuvent être utilisées pour démontrer la T-indépendance ou la D-indépendance d'une règle connective ([29.1]). La question est plus compliquée à cause des deux sortes d'indépendances pour les règles.

Définition 29.1. — Une règle connective

$$\mathscr{R} : \quad f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \vdash\!\!\!\dashv g(x_1, \ldots, x_n)$$

([29.1]) Les méthodes indiquées ici pour démontrer l'indépendance d'un schéma d'axiomes ou la T-indépendance d'une règle connective ont été inventées par Bernays (voir Church 1956, §§ 19 et 29).

sera dite « D-*valide* » dans une évaluante, si, les α étant les assignations dans cette évaluante,

$$\forall \alpha (\alpha f_1(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}) \wedge \ldots \wedge \alpha f_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D})$$

où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des éléments distingués.

Définition 29.2. — Une règle connective

$$\mathcal{R} : \quad f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \sqsubset g(x_1, \ldots, x_n)$$

sera dite « T-*valide* » dans une évaluante si, les $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ étant les assignations, on a

$$\forall \alpha_1 (f_1(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}) \wedge \ldots \wedge \forall \alpha_k (\alpha_k f_k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}) \\ \Rightarrow \forall \alpha_{k+1} (\alpha_{k+1} g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}),$$

où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des éléments distingués.

Remarques :

1° Il est évident que toute règle D-valide est également T-valide dans la même évaluante. La réciproque est fausse : voir Ch. 13.

2° Les deux notions qui viennent d'être définies étaient déjà distinguées clairement l'une de l'autre dans Harrop 1958. Je n'ai changé que le vocabulaire ([29.2]).

3° Pour démontrer qu'une règle connective est D-indépendante, la méthode la plus utilisée consiste à trouver une évaluante dans laquelle cette règle ne soit pas D-valide et où les schémas d'axiomes sont valides et les autres règles sont D-valides. Pour montrer qu'une règle est T-indépendante, le procédé le plus utilisé est analogue, mais il ne faut pas oublier de vérifier que la suppression de la règle en question entraîne la disparition de certaines thèses du système ([29.3]).

Théorème 29.1. — *Pour que la règle connective*

$$\mathcal{R} : \quad f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \sqsubset g(x_1, \ldots, x_n)$$

soit D-*valide, il est nécessaire et suffisant qu'on ait pour chaque* $\xi_1, \ldots \xi_n \in \mathcal{B}$

$$f^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D} \wedge \ldots \wedge f_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow g^*(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{D},$$

([29.2]) Harrop appelle « weakly independant » les règles que j'appelle « D-indépendantes » et « strongly independant » les règles que j'appelle « T-indépendantes » La notion de « T-indépendance » (et celle de « T-validité ») ont été nommées ainsi pour des raisons évidentes. Voir aussi Łoś-Suszko 1958 et remarque 1° de la Définition 29.4 ci-dessous.

([29.3]) Voir McKinsey 1936 et Church 1956, § 49.

où $\mathfrak{D}$ *est l'ensemble des éléments distingués, et* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *des éléments quelconques de la base.* — En effet, il suffit d'appliquer le Théorème 28.1 à la Définition 29.1.

DÉFINITION 29.3. — Une évaluante sera dite « *un modèle* T-*caractéristique* » d'un système connectif, si les règles T-valides dans l'évaluante sont les règles T-acceptables dans le système.

DÉFINITION 29.4. — Une évaluante sera dite « *un modèle* D-*caractéristique* » d'un système connectif, si les règles connectives D-valides dans l'évaluante sont les règles connectives D-acceptables dans le système.

REMARQUES :

1° Ce sont les deux définitions précédentes qui justifient l'emploi des expressions « D-valides » et « T-valides » (les auteurs qui ont distingué clairement entre ces deux sortes de validité, en particulier HARROP 1958, disent respectivement « règles fortement valides » et « règles faiblement valides »).

2° Dans la suite du chapitre présent, on utilisera les notations suivantes (pour les thèses et pour les règles connectives) :

$\mathfrak{T}$ = ensemble des thèses,
$\mathfrak{T}_D$ = » » règles D-acceptables,
$\mathfrak{T}_T$ = » » règles T-acceptables,
$\mathfrak{V}$ = » » formules valides,
$\mathfrak{V}_D$ = » » règles D-valides,
$\mathfrak{V}_T$ = » » règles T-valides,

pour un système connectif donné et une évaluante donnée.

3° Lindenbaum a démontré que, pour tout système connectif, il existe une évaluante (de base infinie) telle que $\mathfrak{V} = \mathfrak{T}$. De plus, dans cette évaluante on a également $\mathfrak{V}_D = \mathfrak{V}_T = \mathfrak{T}_T$ (voir plus loin § 30).

4° Łoś et Suszko ont démontré (voir ŁOŚ-SUSZKO 1958, § 9) que, sous des conditions assez larges, les systèmes connectifs ont des évaluantes telles que

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{T},$$
$$\mathfrak{V}_D = \mathfrak{T}_D,$$
$$\mathfrak{V}_T = \mathfrak{T}_T.$$

5° HARROP 1958 a démontré que, si, pour un système connectif donné et une règle connective donnée, il existe une évaluante qui est un modèle caractéristique du système et dans laquelle la règle donnée est T-valide, alors il existe aussi une évaluante qui est un modèle caractéristique du système et dans laquelle la règle donnée est D-valide; de plus, si la première évaluante est finie, la seconde l'est aussi, et elle peut être construite effectivement à partir de la première.

6° Une réciproque partielle au résultat de Harrop a été annoncée dans une Note, présentée au Congrès international des Mathématiciens d'Edimbourg (PORTE 1958.*e*); voir plus loin Ch. 13 (Thm. 38.6).

30. Congruences, évaluantes de Lindenbaum.

Les congruences des systèmes connectifs ont été définies au Chapitre 10. Nous allons voir maintenant les congruences des évaluantes.

DÉFINITION 30.1. — Une congruence d'une évaluante est une relation d'équivalence entre éléments de sa base, qui est une congruence de son algèbre sous-jacente, et qui est de plus compatible avec la partition de la base entre éléments distingués et éléments non distingués.

Il existe entre les congruences et les homomorphismes des évaluantes le même rapport qui existe entre les congruences et les homomorphismes de toute espèce de structures mathématiques. Si $\mathfrak{M}$ est une évaluante et E une congruence de cette évaluante, on définit de la façon habituelle la structure quotient $\mathfrak{M}/E$ qui est une image homomorphe de l'évaluante $\mathfrak{M}$.

DÉFINITION 30.2. — Si $\mathcal{S}$ est un système connectif ayant pour ensemble des formules $\mathcal{F}$, pour ensemble des thèses $\mathfrak{T}$, et pour connecteurs $C_1, \ldots, C_k, \ldots$, on appelle « *évaluante de Lindenbaum* » du système connectif l'évaluante

$$\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{F}, \Phi_{C_1}, \ldots, \Phi_{C_k}, \ldots, \mathfrak{T} \rangle.$$

Autrement dit, on a considéré l'ensemble des formules comme ensemble de base de l'évaluante, l'ensemble des thèses comme ensemble des éléments distingués, et les fonctions connectives génératrices comme fonctions d'évaluation génératrices.

REMARQUES :

1° Les congruences d'un système connectif sont identiques aux congruences de son évaluante de Lindenbaum.

2° Les assignations d'un système connectif dans son évaluante de Lindenbaum sont identiques aux substitutions du système.

3° Les assignations d'un système connectif dans une évaluante sont identiques aux homomorphismes de son évaluante de Lindenbaum dans l'évaluante en question ([30.1]).

4° Il ne faut cependant pas confondre un système connectif avec son évaluante de Lindenbaum; car il existe d'autres évaluantes qui joueront des rôles analogues par rapport au système.

([30.1]) Remarquer que les homomorphismes dans sont beaucoup moins intéressants que les homomorphismes sur (voir Déf. 28.8).

THÉORÈME 30.1. — *L'évaluante de Lindenbaum d'un système connectif est un modèle caractéristique de ce système.* — C'est une conséquence évidente du fait que les assignations dans l'évaluante de Lindenbaum sont identiques aux substitutions; il faudra tenir compte de la propriété substitutive des systèmes connectifs (voir Déf. 24.3), et du fait qu'il existe une « substitution identique » σ_0 telle que $\sigma_0 x = x$ pour toute formule x.

REMARQUE. — Le théorème précédent est connu dans la littérature sous le nom de « Théorème de Lindenbaum ». Il a été publié pour la première fois dans un cas particulier, dans McKINSEY 1941, Thm. 4; mais il avait été communiqué à cet auteur par Tarski qui le tenait lui-même de Lindenbaum; ce dernier est mort avant de l'avoir publié.

THÉORÈME 30.2. — *L'évaluante de Lindenbaum d'un système connectif est un modèle D- et T-caractéristique de ce système.*

La démonstration s'appuie sur les mêmes faits que la démonstration des Thms 25.1 et 30.1. De plus, comme toute règle D-valide est évidemment T-valide, on a bien : $\mathfrak{V}_D = \mathfrak{V}_T = \mathfrak{V}$.

THÉORÈME 30.3. — *Les congruences de l'évaluante de Lindenbaum d'un système connectif, ordonnées par inclusion, constituent un treillis complet.* — C'est une conséquence immédiate du Théorème 22.1 et de la première remarque à la Définition 30.2.

Il en résulte que, pour toute évaluante de Lindenbaum, il existe une congruence maximum. Ce qui justifie la définition suivante :

DÉFINITION 30.3. — Si $\mathfrak{S}$ est un système thétique, $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})$ son évaluante de Lindenbaum, et E la congruence maximum de l'évaluante de Lindenbaum, alors l'évaluante $\mathfrak{L}(\mathfrak{S})/E$ sera appelée « *l'évaluante de Lindenbaum réduite* » du système connectif.

REMARQUE. — Certains auteurs appellent tout simplement « évaluante de Lindenbaum » (ou plutôt « matrice de Lindenbaum »), ce que j'ai appelé « évaluante de Lindenbaum réduite ».

THÉORÈME 30.4. — *L'évaluante de Lindenbaum réduite d'un système connectif est un modèle caractéristique de ce système; c'est également un modèle D- et T-caractéristique de ce système.* — Conséquence immédiate des Théorèmes 28.3, 30.1 et 30.2.

DÉFINITION 30.4. — Étant donné une évaluante

$$\mathfrak{M} = \langle \mathcal{B}, f_1, \ldots, f_i, \ldots, \mathcal{D} \rangle,$$

on appellera « *sous-évaluante* » de $\mathfrak{M}$ toute évaluante

$$\mathfrak{M}' = \langle \mathcal{B}', f_1', \ldots, f_i', \ldots, \mathcal{D}' \rangle,$$

où

(1) $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$;

(2) $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$;

(3) les fonctions d'évaluation génératrices f_1', ..., f_i', ... sont les restrictions à $\mathcal{B}'$ des fonctions d'évaluation génératrices homologues de $\mathfrak{M}$.

Remarques :

1° Cette notion est empruntée à Kalicki 1948 (Déf. 7).

2° Si $\mathfrak{M}'$ est une sous-évaluante de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ peut avoir moins de formules valides que $\mathfrak{M}$, autant, ou plus. Le premier et le troisième cas sont triviaux $\left(\text{on peut par exemple prendre } \mathcal{B}' = \bigcap \mathcal{D} \text{ ou } \mathcal{B}' = \mathcal{D}\right)$. Pour le deuxième cas, voir Church 1953, pp. 42 et 43.

Définition 30.5. — Une évaluante $\mathfrak{M}'$, homologue à $\mathfrak{M}$, sera dite une « *sous-évaluante conservative* » de $\mathfrak{M}$ si tout est comme dans la Définition 30.4, sauf que la condition (2) est renforcée en (2′) :

(2′) $\mathcal{D}' = \mathcal{B}' \cap \mathcal{D}$.

Théorème 30.5. — *Si une formule est valide dans une évaluante, elle est également valide dans toute sous-évaluante conservative de la première.*

La démonstration résulte immédiatement de la condition (2′).

Définition 30.6. — On appellera « *variante* » d'une évaluante toute évaluante homologue qui ne diffère de la première que par l'ensemble des éléments distingués.

Remarques :

1° Une variante d'une évaluante peut avoir moins de formules valides que la première, autant ou plus. Le premier et le troisième cas sont triviaux; pour le deuxième cas, voir l'exemple de Church cité dans la deuxième remarque après la Définition 30.4.

2° On a vu que l'évaluante de Lindenbaum d'un système connectif est un modèle caractéristique de ce système; elle a pour ensemble des valeurs distinguées l'ensemble des thèses du système, $\mathfrak{S}$. Toute variante de cette évaluante a pour ensemble des éléments distingués un ensemble de formules du système, $\mathfrak{S}'$. Cette variante ne pourra être un modèle caractéristique du système que si $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$. En effet, s'il existait une formule appartenant à $\mathfrak{S}'$ et non à $\mathfrak{S}$, la substitution identique lui assignerait une valeur non distinguée dans la variante.

DÉFINITION 30.7. — Étant donné un système connectif $\mathcal{S}$, ayant pour atomes $p_1, \ldots, p_i, \ldots$, on appellera « *évaluante de Łos pour les atomes* $A = \{ q_1, \ldots, q_n, \ldots \}$ » l'évaluante

$$\mathcal{E}_A(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{F}_A, f_{1.A}, \ldots, f_{i.A}, \ldots, \mathcal{C}_A \rangle,$$

où $\mathcal{F}_A$ est l'ensemble des formules du système qui ne contienne que les atomes A, $f_{1.A}, \ldots, f_{i.A}, \ldots$ sont les restrictions des fonctions connectives génératrices à A, et où $\mathcal{C}_A$ est l'ensemble des thèses de $\mathcal{S}$ qui ne contiennent que les atomes A.

REMARQUES :

1° Les évaluantes de Łoś sont appelées « évaluantes de Lindenbaum » (ou plutôt « matrices de Lindenbaum ») dans Łoś 1949 ([30.2]).

2° Il est évident que, pour un même système connectif, les évaluantes de Łoś relatives à un même nombre d'atomes sont toutes isomorphes entre elles. On peut donc parler, par abus de langage, de « l'évaluante de Łoś pour n atomes », sans préciser de quels atomes il s'agit.

THÉORÈME 30.6. — *Les évaluantes de Łoś d'un système connectif sont des modèles de ce système.*

C'est une conséquence immédiate du Théorème 30.5.

THÉORÈME 30.7. — On dira qu'un système connectif est « *n-réductible* » si, pour chaque non-thèse de ce système, il existe une formule contenant au plus n atomes qui provient de la première par une substitution et qui est également une non-thèse ([30.3]). *Si un système connectif est n-réductible, alors l'évaluante de Łoś pour n atomes est un modèle caractéristique de ce système.*

Démonstration. — Les assignations dans $\mathcal{E}_A(\mathcal{S})$ sont les substitutions qui ne donnent que des formules ne contenant pas d'autres atomes que ceux de A. Si le système est n-réductible, il existe pour chaque non-thèse une assignation qui lui donne une valeur non distinguée; donc, aucune non-thèse n'est valide. En tenant compte du Théorème 30.6, on a le résultat cherché.

Les systèmes pour le calcul propositionnel classique sont des exemples dans lesquels le Théorème 30.7 s'applique (voir plus loin Ch. 13). D'autres exemples sont certains systèmes de calculs modaux; voir MCKINSEY-TARSKI 1948.

([30.2]) Lindenbaum lui-même a peu publié; j'ignore s'il avait étudié ce que j'appelle les « évaluantes de Łoś ».

([30.3]) Cette notion est empruntée à MCKINSEY-TARSKI 1948.

THÉORÈME 30.8. — *Il existe des systèmes connectifs pour lesquels certaines évaluantes de Łoś ne sont pas des modèles caractéristiques.*

Je vais donner un exemple d'un système connectif $\mathcal{S}$ dans lequel l'évaluante de Łoś pour un atome n'est pas un modèle caractéristique. L'alphabet du système comprend un seul connecteur binaire C et au moins deux atomes p_1 et p_2. Les formules sont définies de la façon habituelle, et les thèses sont les formules qui se terminent par Cxx, où x est une formule quelconque du système. La formule Cp_1p_2 n'est donc pas une thèse. Cependant, si $A = \{ p_1 \}$ cette formule sera valide dans $\mathcal{L}_A(\mathcal{S})$. En effet, si l'on substitue à p_1 et à p_2 des formules qui ne contiennent que p_1, on obtiendra une formule qui se terminera par Cp_1p_1 et qui ne contiendra pas d'autre atome que p_1, c'est-à-dire un élément distingué de l'évaluante.

THÉORÈME 30.9. — *Toute évaluante de base finie ou dénombrable, qui est un modèle caractéristique d'un système connectif, est une image homomorphe d'une variante de l'évaluante de Lindenbaum du système.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{S}$ le système, $\mathfrak{M}$ l'évaluante, $\mathcal{B}$ sa base et $\mathcal{D}$ son ensemble d'éléments distingués. Il existe une assignation qui applique les formules atomiques de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{B}$. A cause du Théorème 28.1 et de la Définition 28.8, cette assignation est un homomorphisme de l'algèbre sous-jacente de $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ sur $\mathfrak{M}$. Si nous remplaçons dans $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ l'ensemble des thèses (considéré comme ensemble des éléments distingués) par l'ensemble des contre-images, selon l'assignation donnée, des éléments de $\mathcal{D}$, nous obtenons une variante de l'évaluante de Lindenbaum. L'assignation donnée devient, par construction, un homomorphisme de cette variante de $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ sur $\mathfrak{M}$.

31. Questions diverses.

DÉFINITION 31.1. — Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux évaluantes homologues, on appellera « *produit* » de ces deux évaluantes une nouvelle évaluante $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ définie de la façon suivante : la base de $\mathfrak{M}'$ est le produit cartésien des bases de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$; ses fonctions d'évaluation génératrices sont les produits cartésiens des fonctions génératrices homologues dans $\mathfrak{M}_1$ et dans $\mathfrak{M}_2$; son ensemble d'éléments distingués est le produit cartésien des ensembles d'éléments distingués de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$.

DÉFINITION 31.2. — Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont deux évaluantes homologues, on appellera « *somme* » de ces deux évaluantes une nouvelle évaluante $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ définie de la façon suivante : son algèbre sous-jacente est la même que l'algèbre sous-jacente de l'évaluante produit; son

ensemble d'éléments distingués est l'ensemble des doublets $\langle \xi, \eta \rangle$ tels que ξ est un élément distingué de $\mathfrak{M}_1$ ou η est un élément distingué de $\mathfrak{M}_2$.

THÉORÈME 31.1. — On a :

1° *L'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ *est l'intersection de l'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_1$ *et de l'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_2$.

2° *L'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ *est la réunion de l'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_1$ *et de l'ensemble des formules valides dans* $\mathfrak{M}_2$.

Les deux définitions et le théorème précédents sont empruntés sans changement à KALICKI 1950 (voir aussi KALICKI 1948). Le théorème est d'ailleurs une conséquence immédiate des définitions.

REMARQUES :

1° Ces deux définitions et ce théorème pourraient évidemment être généralisés pour un nombre d'évaluantes supérieur à 2.

2° Dans le cas où $\mathfrak{M}_1$ est identique à $\mathfrak{M}_2$, et pourvu qu'il existe des éléments distingués ainsi que des éléments non distingués, il est évident que la somme $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}$ et le produit $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ sont deux évaluantes distinctes; mais ces deux évaluantes ont les mêmes formules valides, ce qui donne de nouveaux exemples pour justifier la remarque 1° après la Définition 30.6.

Ce qui suit est consacré à des questions de finitude.

On sait qu'il existe des calculs connectifs (même des systèmes logistiques connectifs et déterminés connectivement) pour lesquels il n'existe pas de modèle caractéristique fini : c'est le cas, entre autres, du calcul propositionnel intuitionniste ([31.1]), de divers calculs modaux ([31.2]), et même du calcul connectif très simple donné comme exemple (2) au Théorème 27.3 (voir MCKINSEY-TARSKI 1948 et aussi plus loin Ch. 14).

Bien entendu, il existe d'autres systèmes connectifs qui ont des modèles caractéristiques finis : par exemple, les différents systèmes de « calcul propositionnel classique », et même le système très simple donné comme exemple (3) au Théorème 27.3 ([31.3]).

([31.1]) Voir GÖDEL 1932 (aussi CHURCH 1956, § 26.12).

([31.2]) Voir DUGUNDJI 1940.

([31.3]) Cette évaluante est la suivante $\langle \mathfrak{B}, C^*, \mathfrak{D} \rangle$ avec

$$\mathfrak{B} = = \{0,1\}, \qquad \mathfrak{D} = \{0\} \qquad \text{et} \qquad \forall \xi \forall \eta (C^* \xi \eta = 0)$$

En sens inverse, nous trouvons le problème suivant :

PROBLÈME 2. — *Est-ce que pour chaque évaluante finie il existe un système logistique déterminé par un nombre fini de schémas d'axiomes connectifs et de règles connectives dont les thèses soient identiques aux formules valides dans l'évaluante ?*

Le problème précédent reste ouvert, je n'en connais nulle démonstration ni contre-exemple. Dans ROSSER-TURQUETTE 1952, on trouve une solution générale pour les évaluantes pleines; d'autres cas particuliers ont été résolus (voir p. ex. ŁUKASIEWICZ-TARSKI 1930). Mais, à ma connaissance, le Problème 2, dans toute sa généralité, n'a pas été posé dans la littérature.

CHAPITRE 12.

ÉQUIPOLLENCE.

32. Généralités.

Le sujet du chapitre présent est ce qu'on appelle généralement « changement de notions primitives », ou encore ce qu'on entend par diverses « formulations » d'un même calcul connectif. Il s'agit de questions qui paraissent triviales mais qui conduisent à commettre des erreurs si l'on ne les traite pas avec précision.

Pour voir comment cette question se pose d'une façon « naïve », considérons deux « formulations » du calcul propositionnel classique (voir Church 1956).

D'une part, on peut considérer un système ayant la négation, $\neg$, et $\supset$, l'implication, comme connecteurs, ou, comme on dit souvent, comme « connecteurs primitifs », et où la conjonction & sera un « connecteur dérivé », c'est-à-dire une façon de désigner de manière abrégée certaines formules; par exemple on écrira « $p_1 \,\&\, p_2$ » pour désigner la formule $\neg (p_1 \supset \neg p_2)$. Inversement, on peut considérer un système ayant comme connecteurs la négation $\neg$ et la conjonction & et où l'implication $\supset$ sera un « connecteur abrégé », c'est-à-dire que par exemple, « $p_1 \supset p_2$ » sera une façon de désigner de manière abrégée la formule $\neg (p_1 \,\&\, \neg p_2)$.

Mais tout ce qui précède est imprécis. En effet, les deux implications sont distinctes, car la première est un connecteur (qu'on pourrait identifier à une fonction connective génératrice) tandis que la seconde est une fonction connective compliquée d'un autre système connectif; il est dangereux de les confondre, comme on le verra plus loin. Plutôt que de parler de deux « formulations » d'un « même » système formel, il sera plus précis de parler de deux systèmes formels différents et des correspondances qui existent entre eux.

Les considérations qui précèdent nous amènent à poser les définitions suivantes, qui semblent bien être adéquates aux notions « naïves » qu'elles sont chargées de préciser.

Je considérerai d'abord des systèmes connectifs thétiques dans lesquels aucun connecteur n'est o-aire.

DÉFINITION 32.1. — Soit P un système connectif thétique ayant pour atomes $p_1, \ldots, p_k, \ldots$ et pour connecteurs $C_1, \ldots, C_i, \ldots$ (respect. n_1-aire, $\ldots$, n_i-aire, $\ldots$ avec tous les n_i supérieurs à o) et P′ un autre système connectif thétique ayant les mêmes atomes que P ([32.1]). Une application τ de l'ensemble des formules de P dans l'ensemble des formules de P′ sera dite « une *traduction contra-connective* de P dans P′ » si elle satisfait aux conditions suivantes :

(1) $\tau(p_k) = p_k$ pour toute formule atomique;

(2) pour chaque connecteur C_i il existe une fonction connective φ_i de P′ telle que

$$\tau C_i x_1 \ldots x_{n_i} = \varphi_i(\tau x_1, \ldots, \tau x_{n_i})$$

pour toute formule x_1, etc. de P;

(3) $\vdash_P x \Rightarrow \vdash_{P'} \tau x$;

(4) $\neg \vdash_P x \Rightarrow \neg \vdash_{P'} \tau x$

pour toute formule x de P.

DÉFINITION 32.2. — Une application de l'ensemble des formules d'un système connectif P dans l'ensemble des formules d'un système connectif P′ sera appelé « une *quasi-traduction contra-connective* de P dans P′ » si elle satisfait aux conditions (1) et (2) de la Définition 32.1.

REMARQUES :

1° La notion de traduction contra-connective de P dans P′ sert à exprimer abstraitement l'idée « naïve » que les connecteurs de P sont des « abréviations » de certaines fonctions connectives de P′.

2° Dans les Définitions 32.1 et 32.2, on peut avoir P = P′. Dans ce cas, l'identité est une traduction contra-connective. On verra plus loin que, dans certains cas où P = P′, il existe en outre de l'identité, d'autres traductions contra-connectives de P dans lui-même.

3° Dans le cas où P′ est une extension T-conservative de P, l'application identique de P dans P′ est encore une traduction contra-connective. Cette remarque sera utilisée plus loin dans l'étude de la définition formelle des connecteurs.

4° On verra des exemples de traduction contra-connective dans l'étude de l'équipollence entre systèmes connectifs. Il y en a d'autres; par exemple, les traductions T′ et T″, du calcul propositionnel intuitionniste dans le calcul modal S 4, définies dans GÖDEL 1932.*a* et étudiées dans MCKINSEY-TARSKI 1948 (Thms 5.2 et 5.3).

([32.1]) Ceci pour la commodité des écritures. On aurait des résultats analogues, mais des énoncés plus longs, si les deux ensembles d'atomes étaient équipotents mais non identiques.

THÉORÈME 32.1. — *Si τ est une traduction contra-connective de* P *dans* P', *et si f est une fonction connective n-aire de* P, *alors il existe une fonction connective f' de* P' *telle que*

$$\tau f(x_1, \ldots, x_n) = f'(\tau x_1, \ldots, \tau x_n)$$

pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n$ de P.

Démonstration. — D'après les conditions (1) et (2) de la Définition 32.1, et par récurrence sur la construction des fonctions connectives.

REMARQUE. — Par abus de langage, je dirai encore que les traductions contra-connectives sont « permutables à l'homologie près » avec les fonctions connectives.

DÉFINITION 32.3. — Deux systèmes connectifs P et P' seront dits « *équipollents pour le couple de traductions* $\langle \tau, \tau' \rangle$ » si τ est une traduction contra-connective de P dans P' et τ' une traduction contra-connective de P' dans P.

DÉFINITION 32.4. — Deux systèmes connectifs seront dits « *équipollents* » s'il existe un couple $\langle \tau, \tau' \rangle$ de traductions contra-connectives tel que ces deux systèmes soient équipollents pour ce couple de traductions.

THÉORÈME 32.2. — *L'équipollence est une relation d'équivalence.*

En effet, l'équipollence est une relation réflexive (d'après la remarque 2° de la Définition 32.2), symétrique (par construction) et transitive (d'après le Théorème 32.1).

THÉORÈME 32.3. — *Si τ est une traduction contra-connective de* P *dans* P', *et si τ' est une traduction contra-connective de* P' *dans* P, *alors la fonction composée $\tau'\tau$ est une fonction contra-connective de* P, *à l'homologie près* ([32.2]). — Autrement dit, pour chaque fonction connective n-aire f, de P, il existe une autre fonction connective de P, f', telle que

$$\tau'\tau f(x_1, \ldots, x_n) = f'(\tau'\tau x_1, \ldots, \tau'\tau x_n)$$

pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n$ de P.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer deux fois le Théorème 32.1. De plus, d'après la condition (1) de la Définition 32.1, on a $\tau'\tau r = r$ si r est une formule atomique.

THÉORÈME 32.4. — *Si un système* P *est substitutif, et si il est équipollent à un autre système connectif* P', *alors* P' *est également substitutif.*

([32.2]) Avec une nouvelle extension du sens du mot « homologie ».

La notion de système connectif substitutif a été définie plus haut (Déf. 24.3) ([32.3]).

Démonstration. — D'après le Théorème 25.3, si x' est une formule quelconque de P', alors il existe une liste d'atomes $q_1, \ldots, q_n$ et une fonction connective f' de P' telle que $x' = f'(q_1, \ldots, q_n)$. D'autre part, si σ' est une substitution dans P', il existera une substitution de P', peut-être différente de la précédente, $\sigma'_1 = S^{q_1 \ldots q_n}_{a_1 \ldots a_n}$ telle que $\sigma' x' = \sigma'_1 x'$. Donc, d'après le Théorème 25.1, $\sigma' x' = f'(a_1, \ldots, a_n)$ (les a_1, etc. étant des formules de P' qui ne dépendent que de la substitution σ'_1). La propriété à démontrer est donc

$$\vdash_{P'} f'(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow \vdash_{P'} f'(a_1, \ldots, a_n)$$

pour toute fonction connective f', toutes formules $a_1, \ldots, a_n$, et n'importe quels atomes $q_1, \ldots, q_n$. Mais, par hypothèse, il existe une traduction contra-connective de P' dans P. On a donc successivement

$$\vdash_{P'} f'(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow \vdash_P \tau' f'(q_1, \ldots, q_n)$$

d'après la définition 32.1,

$$\vdash_P \tau' f'(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow \vdash_P g(q_1, \ldots, q_n)$$

pour une certaine fonction connective g d'après le Théorème 32.1,

$$\vdash_P g(q_1, \ldots, q_n) \Rightarrow \vdash_P g(\tau' a_1, \ldots \tau' a_n)$$

d'après la propriété substitutive de P,

$$\vdash_P g(\tau' a_1, \ldots, \tau' a_n) \Rightarrow \vdash_P \tau' f'(a_1, \ldots, a_n)$$

d'après le Théorème 32.1,

$$\vdash_P \tau' f'(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \vdash_{P'} f'(a_1, \ldots, a_n)$$

d'après la Définition 32.1, ce qui démontre le théorème.

THÉORÈME 32.5. — *Si* P *et* P' *sont deux systèmes connectifs équipollents pour le couple de traductions* $\langle \tau, \tau' \rangle$ *alors on a* $\vdash_P x \Rightarrow \vdash_P \tau' \tau x$ *pour toute formule* x *de* P *et* $\vdash_{P'} x' \Rightarrow \vdash_{P'} \tau \tau' x'$ *pour toute formule* x' *de* P'.

C'est une conséquence immédiate des conditions (3) et (4) de la Définition 32.1.

Le théorème précédent donne des conditions nécessaires pour que deux systèmes connectifs soient équipollents. Ces conditions ne sont proba-

---

([32.3]) J'ai supposé plus haut (remarque 1° de la Définition 24.3) que tous les systèmes connectifs étudiés ici sont substitutifs; on voit que cette hypothèse est quelquefois superflue.

blement pas suffisantes, mais elles ont l'avantage de porter séparément sur chacun des systèmes P et P'. Dans certains cas, ces conditions peuvent être renforcées comme on va le voir immédiatement dans ce qui suit.

DÉFINITION 32.5. — Étant donné deux systèmes connectifs P et P', équipollents selon le couple de traductions $\langle \tau, \tau' \rangle$, on dira que ce couple de traductions est « *compatible* avec la congruence maximum de P » si, E étant cette congruence, on a $x \mathrm{E} \tau' \tau x$ pour toute formule x de P.

THÉORÈME 32.6. — *Il existe des cas où, deux systèmes connectifs* P *et* P' *étant équipollents selon un couple de traductions, ce couple de traductions est compatible avec la congruence maximum de* P.

Il suffit d'en donner un exemple. On prendra pour P le calcul propositionnel classique formulé avec l'implication $\supset$ et la négation $\neg$ (voir p. ex. CHURCH 1956, Ch. 2); on prendra pour P' le calcul propositionnel classique formulé avec la conjonction & et la négation $\neg$ ([32.4]). Les traductions contra-connectives τ et τ' seront complètement déterminées par les quatre conditions suivantes :

$$(1) \quad \tau(\neg x) = \neg(\tau x),$$
$$(2) \quad \tau(x \supset y) = \neg(\tau x \,\&\, \neg \tau y)$$

pour toutes formules x et y de P;

$$(3) \quad \tau'(\neg x') = \neg(\tau' x')$$
$$(4) \quad \tau'(x' \,\&\, y') = \neg(\tau' x' \supset \neg \tau' y')$$

pour toutes formules x' et y' de P'.

Il s'ensuit que, pour toutes formules x et y de P, on a

$$\tau'\tau(\neg x) = \neg \tau'\tau x \qquad \text{et} \qquad \tau'\tau(x \supset y) = \neg\neg(\tau'\tau x \supset \neg\neg \tau'\tau y),$$

d'où il suit, d'après des propriétés bien connues de P, qu'on a, E étant la congruence maximum de P,

$$\tau'\tau(\neg x) \,\mathrm{E} \neg \tau'\tau x,$$
$$\tau'\tau(x \supset y) \,\mathrm{E} \tau'\tau x \supset \tau'\tau y,$$

d'où il suit, par récurrence sur la construction des fonctions connectives, que

$$\tau'\tau f(x_1, \ldots, x_n) \,\mathrm{E} f(\tau'\tau x_1, \ldots, \tau'\tau x_n)$$

pour toute fonction connective et toutes formules $x_1, \ldots, x_n$. En particulier, pour des formules atomiques $q_1, \ldots, q_n$, on a

$$\tau'\tau f(q_1, \ldots, q_n) \,\mathrm{E} f(q_1, \ldots, q_n).$$

D'où, d'après le Théorème 25.3, $\tau'\tau z \mathrm{E} z$ pour toute formule z de P.

([32.4]) Voir p. ex. PORTE 1958.*f*.

THÉORÈME 32.7. — *Il existe des cas, où deux systèmes connectifs* P *et* P′ *étant équipollents selon un couple de traductions, ce couple de traductions n'est pas compatible avec la congruence maximum de* P.

Il suffit d'en donner un exemple. On considérera un système ayant une infinité dénombrable d'atomes, un connecteur binaire C et deux connecteurs unaires N et L; les thèses sont toutes les formules CLxLx où x est une formule quelconque du système. Soit P le système qui vient d'être défini. La congruence maximum de ce système est l'égalité, qui est donc la seule congruence : en effet, on a, comme dans l'exemple (2) du Théorème 27.3, $x = y \Leftrightarrow \vdash \mathrm{CL}x\mathrm{L}y$. Nous allons considérer une quasi-traduction contra-connective de P dans lui-même. Cette quasi-traduction τ est complètement déterminée par les trois conditions suivantes :

(1) $\tau \mathrm{C}xy = \mathrm{C}(\tau x)(\tau y)$,
(2) $\tau \mathrm{N}x = \mathrm{N}\tau x$,
(3) $\tau \mathrm{L}x = \mathrm{LN}\tau x$,

pour toutes formules x et y de P. Il est clair que la quasi-traduction τ transforme les formules uniquement de la façon suivante : remplacer chaque occurrence de L par une occurrence de LN. Il s'ensuit que cette quasi-traduction est une traduction contra-connective, c'est-à-dire que les conditions (3) et (4) de la Définition 32.1 sont vérifiées. C'est évident en ce qui concerne la première de ces deux conditions; pour vérifier l'autre, examinons tous les cas possibles : si une formule n'est pas une thèse, c'est que, ou bien elle est de la forme CLxLy avec $x \neq y$, ou bien elle est de la forme Cxy, l'une au moins des formules x ou y ne commençant pas par N, ou bien elle ne commence pas sur C; dans chacun de ces trois cas, τ transforme la formule en une formule entrant dans le même cas, c'est-à-dire transforme les non-thèses en non-thèses [c'est la condition (4) de la Définition 32.1].

Donc, si l'on prend τ' identique à τ, le système P sera équipollent à lui-même selon le couple de traductions $\langle \tau, \tau' \rangle$.

Soit r un atome, nous avons $\tau'\tau \mathrm{L}r = \mathrm{LNN}r$. Mais les formules L$r$ et LNNr ne sont pas congrues, puisqu'il n'y a pas d'autre congruence que l'égalité.

REMARQUES :

1° Les Théorèmes 32.6 et 32.7 justifient la nécessité de la Définition 32.5, puisque l'un montre que les conditions de la définition sont quelquefois réalisées, et que l'autre montre que ces mêmes conditions ne sont quelquefois pas réalisées.

2° L'exemple donné pour la démonstration du Théorème 32.6 montre que ce théorème reste vrai dans le cas où la congruence maximum

dont il est question est déterminée connectivement (voir Thm. 27.3), ce qui est un énoncé plus fort que l'énoncé du Théorème 32.6.

3° L'exemple donné pour la démonstration du Théorème 32.7 est un exemple complètement artificiel; on verra des exemples plus « naturels » au Chapitre 14 (certains systèmes modaux).

THÉORÈME 32.8. — *Il existe des couples de systèmes connectifs qui sont équipollents selon plusieurs couples différents de traductions contra-connectives.* — Il suffit de reprendre l'exemple donné pour la démonstration du Théorème 32.7 : le système en question est équipollent à lui-même selon le couple $\langle \tau, \tau \rangle$ défini plus haut; mais il est également équipollent à lui-même selon le couple $\langle \tau_1, \tau_1 \rangle$ où τ_1 est l'application identique des formules de P sur elles-mêmes.

THÉORÈME 32.9. — *Dans les conditions de la Définition* 32.5 (*et avec les mêmes notations*), *on a* $\tau x = \tau y \Rightarrow x \mathrm{E} y$ *où* E *est la congruence maximum de* P *et où* x *et* y *sont des formules quelconques de* P.

En effet, d'après la Définition 32.5, on a

$$x \mathrm{E} \tau' \tau x,$$
$$\tau' \tau x = \tau' \tau y,$$
$$\tau' \tau y \mathrm{E} y,$$

d'où le théorème, à cause de la transitivité de E.

COMMENTAIRES :

1° La notion d'équipollence telle qu'elle vient d'être définie semble bien être adéquate à la notion vague de « différentes formulations d'un même calcul », tout au moins en ce qui concerne les systèmes connectifs dans lesquels il n'y a pas de connecteur o-aire : tous les cas connus dans la littérature entrent dans cette définition.

2° La notion vague qui a été précisée par la notion mathématique d'équipollence reste très souvent vague chez beaucoup d'auteurs, et cela amène certains d'entre eux à énoncer des erreurs (voir plus loin § 33). Dans CHURCH 1956, ces notions vagues ont été remplacées par des notions précises (voir en particulier § 23), mais les définitions utilisées par Church sont des définitions particulières à des couples donnés de systèmes connectifs donnés; j'ai essayé de trouver une définition générale englobant les cas particuliers considérés par Church. Ce but n'a d'ailleurs pas été complètement atteint puisque j'ai été amené à éliminer le cas des connecteurs o-aires ([32.5]). On pourrait étendre les définitions

([32.5]) Or c'est justement le cas des systèmes P_1 et P_2 de CHURCH 1956 : P_1 contient un connecteur o-aire.

données ici aux cas où il existe des connecteurs o-aires mais il faudrait alors remplacer les traductions considérées plus haut, qui sont des fonctions, par des relations non fonctionnelles, ce qui aurait pour effet de compliquer beaucoup l'exposé.

3° La nécessité d'une définition générale telle que celle qui a été donnée plus haut est notée nettement par Church (voir CHURCH 1956, note 202). Church remarque également que l'existence d'une correspondance bi-univoque entre formules de deux systèmes ne pourrait pas remplacer les notions précises qu'il définissait; il remarque également que la notion d'une correspondance bi-univoque et effective entre formules serait également insuffisante.

33. Équipollences et axiomatisations.

Le paragraphe présent est essentiellement consacré au problème suivant : étant donné deux systèmes thétiques équipollents et une axiomatisation de l'un d'eux, trouver une axiomatisation de l'autre.

DÉFINITION 33.1. — Si τ est une traduction contra-connective de P dans P′, et si f est une fonction connective n-aire de P ($n \geqq 1$), on appellera « *traduction de la fonction f* », et l'on désignera par « τf » la fonction f' de P′ dont l'existence est affirmée par le Théorème 32.1.

Autrement dit, on aura

$$\tau f(x_1, \ldots, x_n) = (\tau f)(\tau x_1, \ldots, \tau x_n)$$

pour toutes formules $x_1, \ldots, x_n$ de P.

REMARQUE. — En général, il existe dans P′ des formules qui ne sont les traductions d'aucune formule de P. Par exemple, dans le cas du calcul propositionnel classique, si τ est défini comme dans la démonstration du Théorème 32.6, et si q est un atome, alors la formule $q \,\&\, q$ est une formule de P′ qui n'est la traduction d'aucune formule de P.

La remarque précédente justifie la définition suivante :

DÉFINITION 33.2. — L'ensemble des valeurs prises par la fonction connective f étant un schéma connectif de P, on appellera « *traduction de ce schéma* » l'ensemble des valeurs prises par la fonction τf.

THÉORÈME 33.1. — *Si un schéma connectif est un ensemble de thèses sa traduction est également un ensemble de thèses.*

En effet, d'après la Définition 26.3, un schéma connectif est l'ensemble de toutes les valeurs prises par une certaine fonction connective f; donc, en particulier, si $q_1, \ldots, q_n$ sont des atomes distincts, on a $\vdash_P f(q_1, \ldots, q_n)$

d'où, d'après la Définition 32.1, la Définition 33.1 et le Théorème 32.1, $\vdash_{P'} (\tau f)(q_1, \ldots, q_n)$; d'où encore d'après le Théorème 32.4, $\vdash_{P'} (\tau f)(x'_1, \ldots, x'_n)$, où $x'_1, \ldots, x'_n$ sont des formules quelconques de P'.

DÉFINITION 33.3. — Étant donné une traduction contra-connective τ et une règle connective

$$\mathcal{R} : \quad f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n) \models g(x_1, \ldots, x_n)$$

on appellera « *traduction de la règle connective* $\mathcal{R}$ », et l'on désignera par « $\tau\mathcal{R}$ » la règle suivante de P' :

$$\tau\mathcal{R} : \quad (\tau f_1)(x'_1, \ldots, x'_n), \ldots, (\tau f_k)(x'_1, \ldots, x'_n) \models (\tau g)(x'_1, \ldots, x'_n).$$

Je dirai que « les règles connectives se traduisent » dans le cas où la traduction de chaque règle connective T-acceptable est elle-même une règle T-acceptable. On verra plus loin qu'il existe au moins un cas dans lequel les règles connectives se traduisent : le calcul propositionnel classique. Mais j'ignore s'il existe des cas où certaines règles connectives ne se traduisent pas; la méthode employée pour les schémas connectifs (Thm. 33.1) n'est pas applicable aux règles. Les deux théorèmes qui suivent donnent seulement des réponses partielles au problème de la traduction des règles. Le problème général reste ouvert.

THÉORÈME 33.2. — *Soit* P *et* P' *deux systèmes connectifs équipollents selon un couple de traductions, et supposons connue une axiomatisation connective* P_1 *de* P, *telle que nous connaissions une fonction connective binaire d pour laquelle* P_1 *possède les propriétés de détachement et de rattachement, alors si la traduction de la règle de détachement pour d* [33.1] *est* T-*acceptable dans* P', *les traductions de toutes les règles connectives* D-*acceptables dans* P *seront* T-*acceptables dans* P'.

En effet, grâce à la propriété de rattachement, chaque règle connective D-acceptable dans P_1 donne naissance à un schéma connectif acceptable dans P_1; d'après le Théorème 33.1, la traduction de ce schéma est acceptable dans P'; en appliquant dans P' la traduction de la règle de détachement pour d on retrouve la traduction de la règle initiale. On verra des exemples dans le cas du calcul propositionnel classique (voir § 37).

THÉORÈME 33.3. — *Étant donné deux systèmes connectifs* P *et* P', *équipollents selon le couple de traductions* $\langle \tau, \tau' \rangle$, *si ce couple de traductions est compatible avec la congruence maximum de* P, *toutes les règles connectives se traduisent.*

[33.1] Voir la remarque au théorème 20.1.

Je vais donner la démonstration dans le cas particulier d'une règle à un seul antécédent et n'utilisant que des fonctions connectives unaires; la généralisation est triviale.

Commençons par démontrer

$$\forall x\,((\vdash_{\mathrm{P}} fx \Rightarrow \vdash_{\mathrm{P}} gx) \Rightarrow (\vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau f)\,x \Rightarrow \vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau g)\,x)),$$

En effet, supposons qu'on ait $\vdash fx \Rightarrow \vdash gx$, on aura successivement, E étant la congruence maximum de P :

$$\begin{gathered}
x\,\mathrm{E}\tau'\tau x \qquad \text{(Déf. 32.5)},\\
\vdash (\tau'\tau f)\,(x) \;\Rightarrow\; \vdash (\tau'\tau f)\,(\tau'\tau x) \qquad \text{(Thms 22.2 et 25.7)},\\
\vdash (\tau'\tau f)\,(\tau'\tau x) \;\Rightarrow\; \vdash fx \qquad \text{(Thm. 32.3)},\\
\vdash fx \;\Rightarrow\; \vdash gx \qquad \text{(hypothèse)},\\
\vdash gx \;\Rightarrow\; \vdash (\tau'\tau g)\,(\tau'\tau x) \qquad \text{(Thm, 32.3)},\\
\vdash (\tau'\tau g)\,(\tau'\tau x) \;\Rightarrow\; \vdash (\tau'\tau g)\,(x) \qquad \text{(Thms 22.2 et 25.7)},\\
\vdash (\tau'\tau f)\,(x) \;\Rightarrow\; \vdash (\tau'\tau g)\,(x),
\end{gathered}$$

qui est la conclusion cherchée.

Maintenant, supposant que la règle est T-acceptable dans P, c'est-à-dire que $\vdash_{\mathrm{P}} fx \Rightarrow \vdash_{\mathrm{P}} gx$ et x' étant une formule quelconque de P′, on aura successivement

$$\begin{gathered}
\vdash_{\mathrm{P}'} (\tau f)\,(x') \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau f)\,(\tau' x') \qquad \text{(Déf. 33.1)},\\
\vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau f)\,(\tau' x') \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau g)\,(\tau' x')
\end{gathered}$$

(cas particulier de la propriété démontrée plus haut),

$$\begin{gathered}
\vdash_{\mathrm{P}} (\tau'\tau g)\,(\tau' x') \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{P}'} (\tau g)\,(x') \qquad \text{(Déf. 33.1)},\\
\vdash_{\mathrm{P}'} (\tau f)\,(x') \;\Rightarrow\; \vdash_{\mathrm{P}'} (\tau g)\,(x'),
\end{gathered}$$

ce qui exprime que la traduction de la règle est T-acceptable dans P′.

Les théorèmes qui suivent sont relatifs à la construction effective d'une axiomatisation de P′ quand on connaît une axiomatisation connective de P, les systèmes P et P′ étant équipollents selon le couple de traductions $\langle \tau, \tau' \rangle$.

THÉORÈME 33.4. — *Si les règles connectives se traduisent, on obtient une axiomatisation de* P′ *en prenant comme schémas d'axiomes et règles primitives les traductions des schémas d'axiomes et des règles primitives de l'axiomatisation connue de* P *et, de plus, la règle*

$$\mathcal{R}_{\mathrm{T}} : \quad \tau'\tau x' \vdash\!\!\!\dashv x'.$$

En effet, le système logistique ainsi construit aura comme thèses les traductions des thèses de P; on aura d'une part les images par τ des thèses de P (en utilisant les traductions des axiomes et des règles de l'axiomatisation donnée de P) et, d'autre part, les contre-images par τ' des thèses de P : si $x = \tau' x'$, l'image de x est obtenue par les traductions des axiomes et des règles, et sa contre-image est ensuite obtenue par la règle $\mathscr{R}_T$.

Remarques :

1° Il arrive que, dans le système logistique ainsi construit, la règle $\mathscr{R}_T$ ne soit pas T-indépendante (et dans ce cas on obtient encore une axiomatisation de P′ en la supprimant). C'est évident dans le cas où les traductions τ et τ' se réduisent à l'identité; il y a des cas moins triviaux (voir plus loin Ch. 14).

2° Il y a des cas où, au contraire, la règle $\mathscr{R}_T$ est T-indépendante, de sorte que le système obtenu en la supprimant n'est pas suffisant : voir plus loin Ch. 13 (voir également les systèmes pour le calcul propositionnel classique étudiés dans Porte 1958.*f*). La raison essentielle de ce fait est que, en général, il y a dans P′ des formules qui ne sont pas des traductions de formules de P; par exemple, dans le cas cité dans la démonstration du Théorème 32.6, si r est un atome, on a $\tau x \neq r \,\&\, r$ pour toute formule x de P.

3° La règle $\mathscr{R}_T$ n'est pas connective, de sorte que l'axiomatisation obtenue n'est généralement pas connective. Cependant, dans le cas où la congruence maximum de P est déterminée connectivement, on peut remplacer la règle $\mathscr{R}_T$ par des schémas d'axiomes connectifs et des règles connectives : voir le cas du calcul propositionnel classique traité plus loin (Ch. 13).

4° L'oubli de l'indépendance possible de la règle $\mathscr{R}_T$, ou plus précisément le manque de définition précise empêchant même d'énoncer cette règle, ont conduit beaucoup d'auteurs à publier des erreurs. En général, il s'agit de démonstrations erronées (parce qu'incomplètes) de résultats corrects : voir p. ex. Copi 1954, p. 242, ou encore Prior 1955, p. 60. Dans d'autres cas, en appliquant les mêmes méthodes, peu précises, certains auteurs ont été conduits à des résultats erronés (systèmes logistiques insuffisants pour les buts que ces auteurs se proposaient) : voir p. ex. Anderson 1954 (système proposé pour le calcul modal M) ou encore Halmos 1956, p. 368 (erreur corrigée dans Hiż 1958) ([33.2]).

([33.2]) Voir aussi Bernstein 1937 et Rosser-Turquette 1952 (p. 31).

THÉORÈME 33.5. — *Si* τ *est une traduction contra-connective de* P *dans* P′, *et si* f *détermine la congruence maximum de* P (voir Déf. 22.3), *et si les règles se traduisent, alors* τf *détermine la congruence maximum de* P′. — Évident d'après la remarque 2° du Théorème 27.1.

THÉORÈME 33.6. — *Dans les mêmes conditions que pour le Théorème* 33.5, *et si de plus* $\vdash_{\mathrm{P}} f(x, \tau'\tau x)$ *pour toute formule* x *de* P, *alors* $\vdash_{\mathrm{P}'} (\tau f)(x', \tau\tau' x')$ *pour toute formule* x' *de* P′. — Évident d'après les Théorèmes 33.5 et 32.4.

THÉORÈME 33.7. — *Soit* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'_0$ *deux systèmes connectifs thétiques, l'ensemble des thèses de* $\mathcal{S}'_0$ *étant vide, et soit* $\langle \tau, \tau' \rangle$ *un couple de quasi-traductions contra-connectives entre* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'_0$; *on peut trouver un système thétique* $\mathcal{S}'$, *équipollent à* $\mathcal{S}$ *et ne différant de* $\mathcal{S}'_0$ *que par l'ensemble des thèses, si et seulement si* $\vdash_{\mathcal{S}} x \Leftrightarrow \vdash_{\mathcal{S}} \tau'\tau x$ *pour chaque formule* x *de* $\mathcal{S}$.

Il suffit de prendre pour ensemble des thèses de $\mathcal{S}'$ l'ensemble des contre-images des thèses de $\mathcal{S}$ selon τ'. Il y a bien équipollence, car alors l'ensemble des thèses de $\mathcal{S}$ est identique à l'ensemble des contre-images des thèses de $\mathcal{S}'$ selon τ ; en effet, si x est une thèse de $\mathcal{S}$ il en est de même de $\tau'\tau x$ (par hypothèse), et τx est une thèse de $\mathcal{S}'$ par construction.

REMARQUE. — Le système $\mathcal{S}'_0$, avec son ensemble vide des thèses, n'a pas d'autre utilité que d'accorder l'énoncé du théorème précédent avec les définitions générales. En réalité, le problème résolu est de la forme suivante : on se donne l'ensemble des formules $\mathcal{F}'$, et non pas le système thétique $\mathcal{S}'_0$, et il s'agit de répartir les formules $\mathcal{F}'$ en un ensemble de thèses et un ensemble de non-thèses, de façon à construire un système thétique équipollent à $\mathcal{S}$.

Il est clair que le contenu du paragraphe présent est très imparfait. Non seulement beaucoup de problèmes ont été laissés ouverts mais encore les résultats démontrés sont très faibles. De plus, le cas de connecteurs, o-aires n'a pas été traité; les relations possibles entre la théorie de l'équipollence et la théorie des modèles n'ont pas davantage été traitées. Cependant les résultats obtenus, en particulier les Théorèmes 33.2 et 33.4, ont des applications que nous verrons aux chapitres suivants. En fait, l'origine de toute la théorie de l'équipollence a été la nécessité d'éviter des erreurs remarquées dans la remarque 4° à la suite du Théorème 33.4; par exemple, les systèmes nouveaux pour le calcul propositionnel classique avec implication et conjonction, que j'ai publiés dans PORTE 1958.*f*, ont été obtenus comme applications de la théorie de l'équipollence (mais les démonstrations de complétude de ces systèmes ont été données dans le texte cité en utilisant des méthodes différentes).

34. Définitions contra-connectives des connecteurs.

DÉFINITION 34.1. — Le connecteur C (supposé k-aire, $k \geq 1$) du système connectif P sera dit « *défini contra-connectivement par* τ » s'il existe un système connectif P′ équipollent à P selon le couple de traductions $\langle \tau, \tau' \rangle$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° P′ contient tous les connecteurs de P à l'exception de C.

2° τ' est l'application identique de l'ensemble des formules de P′ dans l'ensemble des formules de P.

3° Si une formule x de P ne contient pas C, alors $\tau x = x$.

4° $\tau'\tau x$ est congru à x, pour toute formule x de P.

REMARQUES :

1° Il est clair que $\tau'\tau x = \tau x$, de sorte que τx est toujours une formule de P. La fonction τ est donc une fonction contra-connective de P à l'homologie près (avec le même abus de langage que dans l'énoncé du Théorème 32.3).

2° J'ignore si la condition 4° de la Définition 34.1 peut être supprimée.

THÉORÈME 34.1. — *Les définitions contra-connectives des connecteurs sont des fonctions définitionnelles, au sens de la Définition* 23.1, *en y posant* $\delta(x) = \tau x$.

Les conditions 1° et 2° de la Définition 23.1 sont satisfaites par construction. Pour démontrer que la condition 3° est également satisfaite, utilisons la condition 4° de la Définition 34.1 : E étant la congruence maximum de P, et x étant une formule quelconque de P, on a bien $f(x) \mathrm{E} \tau(f(x))$ pour toute fonction quasi-connective unaire f.

REMARQUES :

1° Dans un système connectif, il peut exister des définitions formelles d'un connecteur qui ne sont pas des définitions contra-connectives. Par exemple, dans le calcul propositionnel classique, on peut définir formellement la disjonction en posant $\delta(x \sqcup y) = (x \supset y) \supset y$ si x et y sont des formules qui ne contiennent que l'atome p_1, $\delta(x \sqcup y) = \neg x \supset y$ si x ou y contiennent au moins une occurrence d'un autre atome, et en complétant la détermination de la fonction δ par récurrence sur la construction des formules et en tenant compte des conditions 1° et 2° de la Définition 23.1.

2° Il est clair d'après ce qui précède que la définition des définitions contra-connectives est assez étroite. Elle paraît cependant préférable à celles qu'on trouve dans la littérature, par exemple; celle de

Ajdukiewicz 1958, qui est trop large, ([34.1]), ou les définitions usuelles, par les évaluantes, qui ont le défaut de dépendre d'*un* modèle caractéristique particulier ([34.2]).

3° La Définition 34.1 permet de justifier complètement le résultat de McKinsey 1939 (non-définissabilité des connecteurs du calcul propositionnel intuitionniste les uns par les autres) ainsi que les résultats analogues. C'était d'ailleurs le but du paragraphe présent.

4° Les définitions contra-connectives des connecteurs (voir Déf. 34.1) sont des définitions normales (voir Déf. 27.3).

([34.1]) La définition d'Ajdukiewicz conduirait à des résultats en contradiction avec le résultat classique de McKinsey 1939.

([34.2]) Voir p. ex. Church 1954, § 24.

CHAPITRE 13.

APPLICATIONS : LE CALCUL PROPOSITIONNEL CLASSIQUE.

35. Généralités.

Dans la littérature l'expression « calcul propositionnel classique » est portée par des systèmes formels divers : tantôt des systèmes thétiques, tantôt des systèmes logistiques, quelquefois des systèmes déductionnels; les systèmes logistiques en question sont quelquefois D-équivalents, d'autre fois simplement T-équivalents, et d'autres fois seulement équipollents; de plus, certains de ces systèmes contiennent des parenthèses formelles ([35.1]), certains autres sont conformes à la définition des systèmes connectifs donnée plus haut. C'est pour cela que j'ai employé plusieurs fois l'expression de « systèmes pour le calcul propositionnel classique » pour désigner l'un quelconque de ces systèmes.

Dans ce qui suit ce que j'appellerai « le calcul propositionnel classique » (en abrégé le CPC) sans autre précision, c'est le système thétique connectif défini dans Łukasiewicz-Tarski 1930, § 2. Les seuls connecteurs sont la négation et l'implication ([35.2]). Le système logistique P de Church 1956 engendre un système thétique qui est identique au CPC, sauf qu'il possède des parenthèses formelles; par abus de langage, je négligerai cette divergence.

J'appellerai CPC-FL (ou encore « système logistique de Frege-Łukasiewicz pour le CPC ») justement le système P de Church 1956, débarrassé de ses parenthèses formelles. Je rappelle que c'est le système logistique

$$\langle \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathfrak{M} \rangle.$$

où

$$\mathcal{E} = \{ \neg, \supset, p_1, \ldots, p_n, \ldots \},$$
$$\mathfrak{M} \neg = 1,$$
$$\mathfrak{M} \supset = 2,$$
$$\mathfrak{M}\, p_n = n + 2.$$

([35.1]) C'est le cas par exemple des systèmes P_1 et P_2 de Church 1956.

([35.2]) Dans Łukasiewicz-Tarski 1930, l'implication est désignée par « C », la négation par « N », la conjonction par « K » et la disjonction par « A ».

$\neg$ est un connecteur unaire, $\supset$ est un connecteur binaire, et les $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ sont les atomes. Par abus de langage, je ne distinguerai pas les systèmes ne différant de celui qui est traité ici que par un changement de numérotation des atomes, pour autant qu'il y a toujours une infinité dénombrable d'atomes. $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des formules (voir Déf. 24.1). Il y a trois schémas d'axiomes et une règle de déduction primitive, à savoir :

$\mathfrak{A}_1$: $\vdash x \supset (y \supset x)$,

$\mathfrak{A}_2$: $\vdash (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$,

$\mathfrak{A}_3$: $\vdash (\neg x \supset \neg y) \supset (y \supset x)$,

$\mathfrak{R}_d$: $x, x \supset y \vdash y$,

où x, y, z sont des formules quelconques.

Il existe, dans la littérature, beaucoup de systèmes logistiques D-équivalents au CPC-FL; voir p. ex. CHURCH 1956, CURRY 1952, PORTE 1958.*c*, etc.

Je rappelle quelques définitions et quelques résultats classiques concernant ce système. La règle $\mathfrak{R}_d$ s'appelle « règle de détachement ». On a la propriété de rattachement relativement à l'implication, autrement dit :

$$\Gamma, x \vdash y \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash x \supset y,$$

où x et y sont des formules quelconques et Γ une suite finie quelconque de formules. On peut remarquer que les schémas d'axiomes $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$, dans un système logistique, où la règle de détachement est la seule règle primitive, rendent la démonstration du théorème de rattachement particulièrement facile.

Les fonctions connectives suivantes sont souvent utilisées :

1° La conjonction & définie par $x \,\&\, y = \neg (x \supset \neg y)$ pour toutes formules x et y.

2° La disjonction $\sqcup$ définie par $x \sqcup y = (x \supset y) \supset y$ pour toutes formules x et y ([35.3]).

3° La double implication $\not\equiv$ définie par $x \not\equiv y = (x \supset y \,\&\, (y \supset x)$ pour toutes formules x et y.

Je rappelle que la congruence maximum E de ce système est déterminée connectivement (voir Déf. 27.1 et Thm. 27.2) car on a pour toutes formules x et y,

$$x \,E\, y \quad \Leftrightarrow \quad \vdash x \not\equiv y.$$

([35.3]) On rencontre souvent dans les manuels une autre « disjonction » définie par $x \sqcup' y = \neg x \supset y$ pour toutes formules x et y. On a alors

$$\vdash x \sqcup' y \not\equiv x \sqcup y.$$

Enfin considérons l'évaluante $\mathfrak{M}_{CPC} = \langle \mathcal{B}, \neg^*, \supset^*, \mathcal{D} \rangle$ où $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $\mathcal{D} = \{0\}$ et où les fonctions sont définies par les tables suivantes :

$\xi \supset^* \eta$:

ξ \ η	0	1
0	0	1
1	0	0

ξ	$\neg^* \xi$
0	1
1	0

Cette évaluante est un modèle caractéristique du CPC. L'énoncé précédent est le théorème de complétude pour le CPC (sous-entendu relativement à $\mathfrak{M}_{CPC}$) ([35.4]).

De plus, le CPC est consistant.

La déductibilité du CPC-FL (autrement dit un système déductionnel engendré par le CPC-FL) peut être caractérisés facilement, par exemple en employant les méthodes de Curry 1952 ou de Gentzen 1934, mais plus simplement que par ces auteurs, puisqu'il n'y a ici que deux connecteurs. En fait, il est immédiat que la déductibilité du CPC-FL est complètement caractérisée par les trois conditions suivantes (qui sont étroitement liées à la forme choisie pour les axiomes et la règle du CPC-FL) :

(1) $x, x \supset y \sqsubset y$;

(2) $\Gamma, x \sqsubset y \Rightarrow \Gamma \sqsubset x \supset y$;

(3) $\Gamma, \neg x \sqsubset \neg y \Rightarrow \Gamma, y \sqsubset x$.

36. **Autres systèmes logistiques engendrant le CPC.**

Il s'agit maintenant des systèmes logistiques qui sont T-équivalents, mais non D-équivalents au CPC-FL.

Il est classique que le CPC est un système thétique substitutif (voir Déf. 24.3), c'est-à-dire que la règle de substitution :

$$\mathcal{R}_s : \quad x \sqsubset \sigma x$$

(où x est une formule quelconque et σ une substitution quelconque) est T-acceptable dans tout système logistique qui engendre le CPC. Mais, il est facile de voir que cette règle n'est pas D-acceptable dans le CPC-FL. En effet, considérons le système logistique obtenu en ajoutant la règle de substitution aux règles de déduction primitives du CPC-FL (et en conservant tout le reste), nous avons dans ce nouveau système $p_1 \sqsubset S^{p_1}_{p_2} p_1$, c'est-à-dire $p_1 \sqsubset p_2$; si la déductibilité était restée celle du CPC-FL, la propriété de rattachement serait conservée, et l'on aurait $\vdash p_1 \supset p_2$ ce qui est faux, comme on le vérifie facilement à l'aide du théorème de complétude.

([35.4]) Voir p. ex. Church 1956, § 15.

Il est d'ailleurs classique que le système obtenu en ajoutant la règle de substitution au CPC-FL est un système logistique saturé (voir Déf. 21.6). Au contraire, le CPC-FL lui-même n'est pas saturé : on peut par exemple lui rajouter comme axiome supplémentaire $\vdash p_1$ (ou aussi bien $\vdash \neg\neg p_1$) sans le rendre inconsistant.

Nous venons de voir un système logistique qui engendre le CPC et dont la déductibilité est plus forte que celle du CPC-FL. Il existe également des systèmes logistiques qui engendrent le CPC et qui ont des déductibilités plus faibles que celle du CPC-FL. Le premier de ces systèmes qui a été publié se trouve, à ma connaissance, dans Hiż 1957 (voir aussi Hiż 1959). Le système suivant, qui a été publié dans Porte 1960.*c*, est plus facile à manier que les systèmes de Hiż.

Définition 36.1. — J'appellerai CPC-P le système logistique

$$\langle \mathscr{E}, \mathscr{T}, \mathscr{A}'_1, \mathscr{A}'_2, \mathscr{A}'_3, \mathscr{R}'_1, \mathscr{R}'_2, \mathscr{R} \rangle,$$

où $\mathscr{E}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{R}$ sont, comme dans le CPC-FL et où les schémas d'axiomes et les règles primitives sont comme suit :

$\mathscr{A}'_1$: $\vdash \neg\neg\, \neg\neg\, (x \supset (y \supset x))$,

$\mathscr{A}'_2$: $\vdash \neg\neg\, \neg\neg\, ((x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset y)))$.

$\mathscr{A}'_3$: $\vdash \neg\neg\, \neg\neg\, ((\neg\neg x \supset \neg\neg y) \supset (y \supset x))$,

$\mathscr{R}'_1$: $\neg\neg\, \neg\neg\, x,\ \neg\neg\, \neg\neg\, (x \supset y) \sqsupset \neg\neg\, \neg\neg\, y$,

$\mathscr{R}'_2$: $\neg\neg\, \neg\neg\, x \sqsupset x$.

Théorème 36.1. — *Le CPC-FL a les mêmes thèses que le CPC-FL.*

En effet, considérons une thèse quelconque t du CPC-FL; il existe une déduction de t dans le CPC-FL, qui est une suite de formules; considérons maintenant la suite des formules qu'on obtient en plaçant une double négation devant chacune des formules de la suite précédente : on obtient ainsi une déduction de $\neg\neg\, \neg\neg t$ dans le CPC-P; une application supplémentaire de $\mathscr{R}'_2$ donne une déduction de t dans le CPC-P.

Théorème 36.2. — *La règle de détachement n'est pas* D*-acceptable dans le CPC-P.*

Il suffit de montrer qu'on n'a pas p_1, $p_1 \supset p_2 \sqsupset p_2$ dans le CPC-P. C'est évident car p_2 n'est pas une thèse, et, d'autre part, les formules p_1 et $p_1 \supset p_2$ ne commençant pas par une double négation, on ne peut absolument rien en déduire ni par $\mathscr{R}'_1$ ni par $\mathscr{R}'_2$.

Nous avons vu plus haut (Thm. 21.8) que l'ensemble des systèmes déductionnels qui engendrent un même système thétique, ordonnés naturellement, constitue un treillis complet. Mais le problème analogue, pour les systèmes déductionnels connectifs, finiment axiomatisables par des règles et schémas d'axiomes connectifs, reste ouvert. J'ai publié

ailleurs (Porte 1962) un système logistique très faible pour le calcul propositionnel classique avec négation, conjonction et disjonction comme connecteurs (et il est probablement facile de construire une axiomatisation analogue du CPC) : ce système ne comprend qu'un seul schéma d'axiomes connectif, et toutes ses règles sont de la forme

$$\mathcal{R} : \quad f(x_1, \ldots, x_n) \vdash\!\!\!\sqsubset g(x_1, \ldots, x_n),$$

où f et g sont des fonctions ultra-connectives (voir Déf. 25.4). Ce système est tellement faible que, non seulement la règle de détachement pour l'implication n'y est pas D-acceptable, mais qu'il en est de même, par exemple, pour la règle de détachement relative à la double implication, c'est-à-dire qu'on n'a pas, en général, $x,\ x \# y \vdash\!\!\!\sqsubset y$. On n'y a même pas $x \vdash\!\!\!\sqsubset y \supset x$, en général.

Ce système est donc très faible, mais j'ignore s'il n'en existe pas de plus faible qui engendre le CPC et qui soit déterminé par un nombre fini de règles et de schémas d'axiomes connectifs. A plus forte raison, j'ignore s'il existe un tel système qui soit plus faible que tous les autres.

Par contre, il est facile de voir que l'ensemble des systèmes déductionnels finiment et connectivement axiomatisables qui engendrent le CPC constitue un semi-treillis supérieur. Ceci est d'ailleurs vrai si l'on remplace le CPC par un système thétique connectif quelconque. En effet, soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux systèmes déductionnels satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}'_1$ des axiomatisations connectives et finies de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$; en réunissant toutes les règles et tous les schémas d'axiomes de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}'_1$, on obtient un système connectif logistique $\mathcal{S}''_1$ déterminé par un nombre fini de règles connectives et de schémas d'axiomes connectifs; ce système logistique engendre un système déductionnel $\mathcal{S}''$ qui est bien la borne supérieure de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

Dans le cas particulier du CPC, l'ensemble des systèmes déductionnels connectivement et finiment axiomatisables contient un élément maximum, comme nous allons le voir. Mais j'ignore si ce fait est ou non généralisable pour n'importe quel système thétique connectif autre que le CPC.

Théorème 36.3. — *Si l'on a, pour toutes formules* $x_1, \ldots, x_n$,

$$(1) \quad \vdash f_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ et } \ldots \text{ et } \vdash f_k(x_1, \ldots, x_n) \ \Rightarrow \ g(x_1, \ldots, x_n),$$

où $f_1, \ldots, f_k$, g *sont des fonctions connectives, on a également :*

$$(2) \quad \vdash f_1(x_1, \ldots, x_n) \supset (\ldots \supset (f_k(x_1, \ldots, x_n) \supset g(x_1, \ldots, x_n))\ldots).$$

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde : si certaines des formules comprises dans (2) n'étaient pas des thèses, on aurait également

$$(3) \quad \neg\vdash f_1(p_1, \ldots, p_n) \supset (\ldots \supset (f_k(p_1, \ldots, p_n) \supset g(p_1, \ldots, p_n))\ldots)$$

puisque le CPC est substitutif. Utilisons maintenant le théorème de complétude : pour avoir (3), on devrait également avoir

$$\alpha g\ (p_1, \ldots, p_n) = 1,$$
$$\alpha f_1 (p_1, \ldots, p_n) = \ldots = \alpha f_k (p_1, \ldots, p_n)) = 0$$

pour au moins une assignation α dans $\mathfrak{M}_{\mathrm{CPC}}$.

Considérons un atome quelconque q et posons

$$z_i = \begin{cases} q \supset q & \text{si} \quad \alpha p_i = 0, \\ \vdash\!\!\!\dashv (q \supset q) & \text{si} \quad \alpha p_i = 1 \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq n$. On aurait alors, pour toute assignation α' dans $\mathfrak{M}_{\mathrm{CPC}}$, $\alpha' z_i = \alpha p_1$, d'où

$$\begin{aligned} \alpha' g (z_1, \ldots, z_n) &= g^* (\alpha' z_1, \ldots, z_n) \\ &= g^* (\alpha p_1, \ldots, \alpha p_n) \\ &= \alpha g (p_1, \ldots, p_n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

et l'on aurait de même

$$\alpha' f_1 (z_1, \ldots, z_n) = \ldots = \alpha' f_k (z_1, \ldots, z_n) = 0$$

pour toute assignation α'. Il existerait donc des formules $z_1, \ldots, z_n$ telles que

$$\vdash f_1 (z_1, \ldots, z_n) \text{ et } \ldots \text{ et } \vdash f_k (z_1, \ldots, z_n) \text{ et } \neg\vdash g (z_1, \ldots, z_n)$$

contrairement à l'hypothèse.

Théorème 36.4. — *Si la règle de détachement est* D*-acceptable dans une axiomatisation du CPC, alors toute règle connective* T*-acceptable dans le CPC est* D*-acceptable dans cette axiomatisation.*

En effet, la T-acceptabilité s'exprime par la proposition (1) ci-dessus; d'où (2) par le Théorème 36.3; d'où la D-acceptabilité par détachement.

Le théorème précédent exprime le fait que, dans l'ensemble des déductibilités connectives qui engendrent le CPC, la déductibilité du CPC-FL est maximum.

Une autre conséquence immédiate du Théorème 36.4 est le résultat classique qu'on appelle souvent (et improprement) « saturation » du CPC-FL ou de systèmes D-équivalents (ou équipollents) au CPC-FL; voir p. ex. Kleene 1952, § 29, Corollaire 2 du Théorème 10. On en déduit facilement la saturation du système logistique obtenu en ajoutant la règle de substitution au CPC-FL. Il s'ensuit que la déductibilité de tout système logistique engendrant le CPC et dans lequel la règle de détachement et la règle de substitution sont D-acceptables est la déductibilité maximum compatible avec le CPC.

37. Les systèmes équipollents au CPC.

Dans ce qui suit je vais donner quelques applications au calcul propositionnel classique, des définitions et des résultats du Chapitre 12. Ces applications pourraient être multipliées à volonté.

Il est classique, dans le CPC, que si l'on définit la conjonction par

$$x \,\&\, y = \neg\, (x \supset \neg\, y)$$

(pour toutes formules x et y), on a ensuite

$$\vdash (x \supset y) \equiv \neg\, (x \,\&\, \neg\, y)$$

autrement dit,

$$\vdash (x \supset y) \equiv \neg\, \neg\, (x \supset \neg\, \neg\, y),$$

d'où

$$x \supset y \in \neg\, \neg\, (x \supset \neg\, \neg\, y).$$

Il s'ensuit, par application du Théorème 33.7, que si

$$\mathcal{S}' = \langle \mathcal{E}', \mathcal{F}', \mathfrak{C}', \mathcal{N}' \rangle$$

où

$$\mathcal{E}' = \{ \neg, \&', p_1, \ldots, p_n, \ldots \}$$

(&′ étant un connecteur binaire et les autres symboles étant identiques aux symboles du CPC que j'ai désignés par les mêmes signes), où $\mathcal{F}'$ est l'ensemble des formules définies selon les méthodes générales, où $\mathcal{N}'$ est identique à la numérotation de l'alphabet du CPC, sauf que $\mathcal{N}'\,\&' = 2$, et où l'ensemble des thèses $\mathfrak{C}'$ est un ensemble de formules non encore déterminé, alors le couple de quasi-traductions contra-connectives $\langle \tau, \tau' \rangle$ défini par

$$\tau\,(\neg\, x) \doteq \neg\, (\tau x)$$

et

$$\tau\,(x \supset y) = \neg\, ((\tau x) \,\&'\, \neg\, (\tau y))$$

pour toutes formules x et y du CPC, et

$$\tau'\,(\neg\, x') = \neg\, (\tau' x')$$

et

$$\tau'\,(x' \,\&'\, y') = \neg\, ((\tau' x') \supset \neg\, (\tau' y'))$$

pour toutes formules x' et y' de $\mathcal{S}'$, devient un couple de traductions contra-connectives entre le CPC et $\mathcal{S}'$ si l'on prend $\mathfrak{C}'$ identique à l'ensemble des contre-images des thèses du CPC selon τ'.

Donc, $\mathcal{S}'$ est équipollent au CPC. Je l'appellerai « le calcul propositionnel avec négation et conjonction », ou en abrégé le CPC(NK) ([37.1]).

([37.1]) Ce nom rappelle les notations de Łukasiewicz pour la négation et la conjonction.

Le problème est maintenant d'axiomatiser le CPC(NK).

Pour simplifier les écritures, je poserai systématiquement $f' = \tau f$ pour chaque fonction connective f du CPC.

Partons du CPC-FL comme axiomatisation du CPC. D'après ce qui précède, nous pourrons appliquer le Théorème 33.3, et d'après les propriétés classiques du CPC-FL, nous pourrons appliquer le Théorème 33.2. On obtient donc, en appliquant également le Théorème 33.5, une axiomatisation du CPC(NK) avec les schémas d'axiomes et les règles qui suivent :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}'_1 : \ \vdash x' \supset' (y' \supset' x'),\\
&\mathcal{A}'_2 : \ \vdash (x' \supset' (y' \supset' z')) \supset' ((x' \supset' y') \supset' (x' \supset' z')),\\
&\mathcal{A}'_3 : \ \vdash (\sim' x' \supset' \sim' y') \supset' (y' \supset' x'),\\
&\mathcal{R}'_d : \ x' x' \supset' y' \vdash y',\\
&\mathcal{R}'_T : \ \tau' \tau x' \vdash x'
\end{aligned}$$

pour toutes formules x', y', z' du CPC(NK).

S'il s'agit seulement de trouver une axiomatisation du CPC(NK), le problème est résolu. Mais, on peut chercher à construire une axiomatisation connective, ce qui n'est pas le cas ci-dessus, car la règle $\mathcal{R}_T$ n'est pas connective.

En appliquant la propriété de rattachement du CPC-FL, et le Théorème 33.5, ainsi que le Théorème 33.1, on peut remplacer la règle $\mathcal{R}_T$ par les deux schémas d'axiomes suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}'_4 : \ \vdash (x' \#' y') \supset' (x' \supset' y'),\\
&\mathcal{A}'_T : \ \vdash x' \#' \tau' \tau x'.
\end{aligned}$$

Le dernier schéma d'axiomes n'est toujours pas connectif. Mais, en utilisant le fait que τ' détermine la congruence maximum du CPC(NK), on pourra remplacer $\mathcal{A}'_T$ par ses cas particuliers relatifs aux fonctions connectives génératrices, de façon à retrouver $\mathcal{A}'_T$ comme schéma de thèses par application du théorème de remplacement; le théorème de remplacement est vrai, et l'on sera sûr de pouvoir le démontrer si l'on postule les schémas d'axiomes et les règles qui assurent que la relation déterminée par $\#'$ est une relation d'équivalence. Tout cela revient à remplacer $\mathcal{A}'_T$ par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}'_5 : \ \vdash x' \#' x',\\
&\mathcal{A}'_6 : \ \vdash x' \,\&'\, y' \#' \sim' \sim' (x' \,\&'\, \sim' \sim' y'),\\
&\mathcal{R}'_1 : \ x' \#' y' \vdash y' \#' x',\\
&\mathcal{R}'_2 : \ x' \#' y', y' \#' z' \vdash x' \#' z'.
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une axiomatisation connective du CPC(NK). Il est possible de la simplifier de différentes manières. D'abord, en utilisant la

propriété de rattachement du CPC-FL, on peut remplacer les règles $\mathcal{R}'_1$ et $\mathcal{R}'_2$ par des schémas d'axiomes, à savoir :

$\mathcal{A}'_7$: $\vdash (x \#' y') \supset' (y' \#' x')$,

$\mathcal{A}'_8$: $\vdash (x' \supset' y') \supset' ((y' \supset' z') \supset' (x' \supset' z'))$.

On n'a plus maintenant qu'une seule règle, à savoir la règle de détachement pour $\supset'$. D'après le Théorème 20.2, et en tenant compte des schémas d'axiomes $\mathcal{A}'_1$ et $\mathcal{A}'_2$, il s'ensuit qu'on a la propriété de rattachement pour $\supset'$ dans l'axiomatisation du CPC(NK) qui vient d'être construite ainsi que dans toutes les axiomatisations qui lui sont D-équivalentes.

On peut encore simplifier. En particulier, on peut tenir compte du fait que $x' \supset' (y' \supset' x' \,\&' y')$ est un schéma de thèses de l'axiomatisation qui vient d'être construite de sorte qu'on peut le rajouter comme nouveau schéma d'axiomes. En tenant compte du fait que $\vdash z' \supset' \barwedge \barwedge z'$ et $\vdash \barwedge \barwedge z' \supset' z'$ se démontrent en employant uniquement $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_3$ et $\mathcal{R}'_d$ (il suffit d'imiter les démonstrations correspondantes de CPC-FL), et en tenant compte du théorème de remplacement pour $\#'$, on peut remplacer $\mathcal{A}'_6$ par les deux schémas

$\mathcal{A}'_9$: $\vdash (x' \&' y') \supset' (x' \&' \barwedge \barwedge y')$,

$\mathcal{A}'_{10}$: $\vdash (x' \&' \barwedge \barwedge y') \supset' (x' \&' y')$.

Maintenant, par des calculs élémentaires, on peut démontrer que certains des schémas d'axiomes de l'axiomatisation construite ne sont pas indépendants. Finalement, on obtient une axiomatisation suffisante avec $\mathcal{A}'_1$, $\mathcal{A}'_2$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}'_9$, $\mathcal{A}'_{10}$ et $\mathcal{R}'_d$. C'est le système D de Porte 1958.*f*. Les systèmes C, E et F du même texte ont été obtenus de façon analogue; mais dans le texte cité, la suffisance de ces systèmes est démontrée par une méthode différente ([37.2]). Par ailleurs, dans Porte 1958.*f*, tous les schémas d'axiomes sont démontrés indépendants; il s'ensuit que le système logistique défini par les trois premiers de ces schémas d'axiomes et la règle de détachement n'est pas suffisant. Ceci justifie la remarque 2° du Théorème 33.4.

En appliquant les méthodes du paragraphe 34, on retrouve facilement tous les résultats classiques concernant la définissabilité des connecteurs : par exemple, dans le système de Hilbert ([37.3]), qui comprend un connecteur unaire $\barwedge$ (négation) et quatre connecteurs binaires $\supset$ (implication), $\&$ (conjonction), $\sqcup$ (disjonction) et $\#$ (double implication), les trois derniers connecteurs sont définissables contra-connectivement à l'aide des deux premiers; de plus, l'implication, la disjonction et la double

([37.2]) En fait, j'avais démontré la D-équivalence de ces systèmes avec celui de Rosser 1953.

([37.3]) C'est le système P_{II} de Church 1956, § 26.

implication sont définissables contra-connectivement à partir de $\barwedge$ et &; de plus, $\supset$, & et $\not\equiv$ sont définissables contra-connectivement à l'aide de $\barwedge$ et $\barvee$. Mais, au contraire, par exemple, la négation n'est pas définissable, dans ce même système, avec les autres connecteurs.

Les résultats qui précèdent, et des résultats analogues qu'il serait facile de démontrer en appliquant les méthodes du paragraphe 34, permettent de justifier la remarque qui suit la Définition 27.3 (utiliser la remarque 4° du Théorème 34.1). En fait, la « justification » donnée ici est empirique et incomplète; il serait possible de la compléter par une étude détaillée des évaluantes pleines ayant même base et même ensemble d'éléments distingués que $\mathfrak{M}_{CPC}$ et des rapports de ces évaluantes avec les systèmes équipollents de CPC. Une telle étude serait élémentaire, mais longue, consistant surtout en rappels de résultats connus dans la littérature, et serait hors du cadre du travail présent.

Au contraire, l'intérêt des méthodes utilisées au Chapitre 12, est qu'elles sont purement syntactiques, au lieu de faire appel à une évaluante particulière. En effet, on sait, et l'on va revoir dans le paragraphe 38, que même pour le CPC il existe des modèles caractéristiques très différents les uns des autres. Cependant, dans le cas du calcul propositionnel classique, il peut être justifié de donner un rôle privilégié à l'évaluante $\mathfrak{M}_{CPC}$ car celle-ci est la plus simple possible (puisque sa base n'a que deux éléments) et que de plus elle est pleine. Mais ce fait n'est pas généralisable à tous les calculs connectifs, en particulier il ne s'étend pas aux calculs connectifs qui n'ont pas de modèle caractéristique fini; or, on sait que des systèmes aussi connus que le calcul propositionnel intuitionniste ou le système modal S 5 de Lewis n'ont pas de modèle caractéristique fini (voir Gödel 1932 et Dugundji 1940).

38. **Les modèles du CPC.**

Nous avons vu que l'évaluante $\mathfrak{M}_{CPC}$ est, d'après un résultat classique, un modèle caractéristique du CPC. Comme la base de cette évaluante ne comprend que deux éléments, on dit souvent que le CPC est un calcul propositionnel « à deux valeurs ». Par ailleurs, l'algèbre sous-jacente de $\mathfrak{M}_{CPC}$ peut être appelée une « algèbre boolienne », au prix d'un abus de langage peu important ([38.1]).

Mais il est évident qu'il existe d'autres modèles caractéristiques du CPC : par exemple, son évaluante de Lindenbaum est un modèle caractéristique dont la base contient une infinité dénombrable d'éléments. De plus, il existe une infinité d'autres modèles caractéristiques du CPC,

([38.1]) En fait, ce sont les fonctions $\barwedge^*$, &* et $\barvee^*$ qui constituent une algèbre boolienne. Mais ces fonctions sont définissables à partir des fonctions $\barwedge^*$ et $\supset^*$, et réciproquement.

en particulier toutes les contre-images homomorphes de $\mathfrak{M}_{CPC}$; il s'ensuit que, quel que soit le nombre cardinal n, fini ou transfini, il existe un modèle caractéristique du CPC dont la base contient exactement n éléments, sous la seule condition $n \geq 2$.

Mais il y a plus : il existe des modèles caractéristiques du CPC qui ne sont pas des contre-images homomorphes de $\mathfrak{M}_{CPC}$. Adoptant la terminologie de Church 1953, je dirai qu'un modèle caractéristique du CPC est « *non-normal* » s'il n'est pas une contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}_{CPC}$, « *faiblement non-normal* » si c'est une variante d'une contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}_{CPC}$ (voir Déf. 30.6), « *fortement non-normal* » s'il n'est une variante d'aucune contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}_{CPC}$.

Le premier exemple connu de modèle caractéristique non-normal du CPC se trouve dans Church-Rescher 1950; c'est un modèle fortement non-normal. Une étude générale sur les modèles caractéristiques non-normaux du CPC est Church 1953; voir aussi Church 1954 (et certains exercices du paragraphe 19 de Church 1956).

Le problème de donner une caractérisation simple des modèles caractéristiques du CPC (ou même simplement une caractérisation simple de leurs algèbres sous-jacentes) n'a pas été résolu par Church et je ne le résoudrai pas davantage. Dans ce qui suit, je n'apporterai qu'une contribution très partielle à la solution de ce problème, et par ailleurs j'utiliserai les résultats déjà obtenus afin d'obtenir de nouveaux résultats concernant la validité des règles dans les modèles du CPC.

Je rappelle d'abord la définition du plus simple des modèles fortement non-normaux du CPC. C'est l'évaluante suivante $\mathfrak{M}_3$, due à Church 1953 (tables IV) définie de la façon suivante :

$$\mathfrak{M}_3 = \langle \mathscr{B}_3, \multimap_3^*, \supset_3^*, \mathscr{D}_3 \rangle,$$

où $\mathscr{B}_3 = \{0, h, 1\}$ et $\mathscr{D}_3 = \{0, h\}$ (h étant un élément quelconque distinct de 0 et de 1), et où les fonctions d'évaluation génératrices sont définies par le tableau suivant :

$\xi \supset_3^* \eta$:

ξ \ η	0	h	1
0	0	h	1
h	h	h	h
1	0	h	0

ξ	$\multimap_3^* \xi$
0	1
h	h
1	0

On remarque que $\mathfrak{M}_3$ contient une sous-évaluante (voir Déf. 30.4) qui est isomorphe (et même identique) à $\mathfrak{M}_{CPC}$. Ce fait n'est pas général : l'exemple 1 de Church 1954 est un modèle caractéristique du CPC qui ne contient aucune sous-évaluante isomorphe à $\mathfrak{M}_{CPC}$ ni même isomorphe à une contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}_{CPC}$; mais il faut remarquer que la base de ce modèle est infinie.

Remarquons encore que l'évaluante de Lindenbaum du CPC est un modèle faiblement non-normal, et qu'il en est de même pour l'évaluante de Lindenbaum réduite : en effet, l'évaluante de Lindenbaum réduite n'a qu'un seul élément distingué, alors que sa base contient une infinité d'éléments (par suite du fait que $p_i \not\leftrightarrow p_j$ n'est jamais une thèse si $i \neq j$).

D'autre part, le Théorème 30.9 doit être applicable aux modèles caractéristiques du CPC, en particulier à ceux que nous avons vus en détail ci-dessus. Ainsi, $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ est obtenu comme image homomorphe d'une variante de l'évaluante de Lindenbaum du CPC dans laquelle on a pris comme ensemble d'éléments distingués un ultra-filtre de l'algèbre sous-jacente (voir § 10). Pour obtenir $\mathfrak{M}_3$, on pourra prendre comme ensemble d'éléments distingués l'ensemble obtenu en ajoutant à un ultra-filtre toutes les formules qui contiennent au moins une occurrence de l'atome p_1 ; soit maintenant B cet ensemble des formules qui contiennent au moins une occurrence de p_1, A l'ensemble des formules qui appartiennent à l'ultra-filtre en question mais non à B, et C l'ensemble de toutes les autres formules du CPC, alors la partition $\{ A, B, C \}$ détermine une congruence de l'évaluante; l'image homomorphe obtenue en prenant le quotient de l'évaluante par cette congruence est justement $\mathfrak{M}_3$.

THÉORÈME 38.1. — *Tout modèle caractéristique fini du CPC est l'image homomorphe d'un modèle caractéristique fini faiblement non-normal* ([38.2]) *du CPC.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}$ un modèle caractéristique fini du CPC. D'après le Théorème 31.1, les évaluantes $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ et $\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ sont des modèles caractéristiques du CPC. Ces deux modèles ne diffèrent que par l'ensemble des éléments distingués. Soit $\mathfrak{D}_\times$ l'ensemble des éléments distingués de l'évaluante produite, et $\mathfrak{D}_+$ l'ensemble des éléments distingués de l'évaluante somme; d'après les Définitions 31.1 et 31.2, on a $\mathfrak{D}_\times \subseteq \mathfrak{D}_+$; de plus, si $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des éléments de la base de $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ qui ont la forme $\langle d, x \rangle$, où d est un élément distingué de $\mathfrak{M}$ et x un élément quelconque de $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$, on a $\mathfrak{D}_\times \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}_+$; de même si $\mathfrak{D}_{\text{CPC}}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ qui ont la forme $\langle y, o \rangle$ où y est un élément quelconque de $\mathfrak{M}$ (rappelons que o est l'élément distingué de $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$) alors on a $\mathfrak{D}_\times \subseteq \mathfrak{D}_{\text{CPC}} \subseteq \mathfrak{D}_+$. Il s'ensuit que si l'on considère maintenant deux variantes de $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}_{\text{CPC}}$, la première obtenue en prenant $\mathfrak{D}$ comme ensemble des éléments distingués, la seconde obtenue en prenant $\mathfrak{D}_{\text{CPC}}$ comme ensemble des éléments distingués, ce sont des modèles caractéristiques du CPC; mais la première de ces variantes est une contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}$, tandis que

([38.2]) Avec les définitions adoptées ici, tout modèle faiblement non-normal est également normal.

la seconde est une contre-image homomorphe de $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$, ce qui démontre le théorème.

Il résultait déjà du Théorème 30.9 que l'algèbre sous-jacente d'un modèle caractéristique fini ou dénombrable du CPC est toujours une image homomorphe d'une contre-image homomorphe d'une algèbre boolienne finie ou dénombrable. Le Théorème 38.1 permet d'améliorer ce résultat en énonçant : l'algèbre sous-jacente d'un modèle caractéristique fini du CPC est toujours une image homomorphe d'une contre-image finie d'une algèbre boolienne finie.

Mais les résultats précédents ne donnent que des conditions nécessaires et non suffisantes, de sorte qu'on est encore loin de la solution du problème d'une caractérisation simple des modèles caractéristiques du CPC.

De toutes façons, la notion de modèle normal, qui se justifie dans le cas du CPC par le caractère assez exceptionnel de son modèle usuel ($\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$), est loin d'être facilement généralisable pour les autres systèmes connectifs. Si j'ai traité cette question dans le travail présent, c'est parce que je vais être amené à construire des modèles caractéristiques non-normaux du CPC dans l'étude de la validité des règles. Or cette dernière question, que j'étudie dans le cas du CPC, est susceptible de généralisations faciles à beaucoup d'autres systèmes connectifs.

On trouve dans Harrop 1958, parmi d'autres résultats intéressant la théorie des systèmes connectifs et de leurs modèles, un résultat (le Lemme 3.2 de ce texte) qui, exprimé dans le vocabulaire du travail présent, peut s'énoncer de la façon suivante : S'il existe un modèle caractéristique fini d'un système connectif et si une certaine règle connective est T-valide dans ce modèle, alors il existe un autre modèle caractéristique fini (du même système connectif) dans lequel la même règle est D-valide.

Les théorèmes suivants sont en fait des lemmes aboutissant à une réciproque partielle du théorème de Harrop.

Théorème 38.2. — *Toutes les évaluantes de Łoś du CPC sont des modèles caractéristiques du CPC.*

D'après le Théorème 30.7, il suffit de démontrer que le CPC est 1-réductible (voir McKinsey-Tarski 1948, Déf. 2.3). Cela revient à démontrer que pour toute formule x, on a

$$\neg\vdash x \;\Rightarrow\; \neg\vdash s_1 x,$$

s_1 étant une substitution qui remplace tous les atomes qui ont des occurrences dans x par des formules ne contenant d'occurrences que d'un seul atome (la substitution s_1 pouvant changer avec la formule x pourvu que l'atome unique qui a des occurrences dans $s_1 x$ soit toujours

le même). Or cela a déjà été démontré au cours de la démonstration du Théorème 36.3.

Il est évident que la congruence maximum de l'évaluante de Lindenbaum d'un système connectif quelconque, restreinte à une évaluante de Łoś, est une congruence de cette évaluante de Łoś. Ceci permet de définir les « *évaluantes de Łoś réduites* » d'une façon analogue à la Définition 30.3.

THÉORÈME 38.3. — *Les évaluantes de Łoś réduites du* CPC *sont finies.*

En effet, si deux formules prennent la même valeur pour toutes les assignations dans $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$, elles sont congrues. Il y a donc exactement autant de classes d'équivalence de fonctions connectives qu'il y a de fonctions d'évaluation. En utilisant le Théorème 25.3, on en conclut qu'il existe, pour chaque nombre entier $n \geq 1$, exactement 2^{2^n} classes d'équivalence de formules contenant au plus n atomes distincts.

THÉORÈME 38.4. — *Dans une évaluante de Łoś du CPC, si l'on ajoute un nombre fini d'éléments (c'est-à-dire de formules) à l'ensemble des éléments distingués, l'évaluante ainsi obtenue est un modèle caractéristique du CPC.*

Il suffit de démontrer que toute non-thèse du CPC possède un nombre infini de substitutions qui la transforment en un nombre infini de formules qui ne sont pas des thèses et dans lesquelles il n'y a d'occurrences que d'un seul atome. D'après le Théorème 25.3, pour toute formule x, x ne contient d'occurrences que des atomes $q_1, \ldots, q_j$ alors il existe une fonction connective f telle que $x = f(q_1, \ldots, q_j)$. La suite est analogue à la démonstration du Théorème 36.3 : Soit α une assignation dans $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$ telle que $\alpha x = 1$; considérons un atome particulier r, et définissons une substitution particulière s_k de la façon suivante :

$$s_k q_i = \begin{cases} \overbrace{\neg\,\ldots\,\neg\,\neg}^{2k \text{ fois}} (r \supset r) & \text{si } \alpha q_i = 0 \\ \underbrace{\neg\,\ldots\,\neg\,\neg\,\neg}_{2k+1 \text{ fois}} (r \supset r) & \text{si } \alpha q_i = 1 \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq j$. On peut définir une infinité de telles substitutions en prenant successivement $k = 1, 2, 3$, etc. On démontre ensuite, comme pour le Théorème 36.3, que pour chaque assignation α' dans $\mathfrak{M}_{\text{CPC}}$, on a $\alpha' s_k x = 1$. On a donc bien

$$\neg\vdash x \;\Rightarrow\; \neg\vdash s_k x$$

et il est évident que

$$k \neq k' \;\Rightarrow\; s_k \neq s_{k'} x.$$

THÉORÈME 38.5. — *Si un système connectif quelconque possède une infinité d'atomes, l'évaluante obtenue à partir de l'évaluante de Lindenbaum*

de ce système, en ajoutant un nombre fini d'éléments (c'est-à-dire de formules) à l'ensemble des éléments distingués, est un modèle caractéristique de ce système.

Soit encore x une formule quelconque ne contenant d'occurrences que des atomes $q_1, \ldots, q_j$, et soit $r_1, \ldots, r_j$ des atomes distincts des précédents et différents les uns des autres; posons

$$s = \mathrm{S}^{q_1 \ldots q_j}_{r_1 \ldots r_j} \qquad \text{et} \qquad s' = \mathrm{S}^{r_1 \ldots r_j}_{q_1 \ldots q_j},$$

on a alors $s'sx = x$ d'où, d'après la propriété substitutive des systèmes connectifs considérés ici (voir remarque 1° après la Définition 24.3) $\neg \vdash x \Rightarrow \neg \vdash sx$. Or, comme on peut choisir les atomes $r_1, \ldots, r_j$ d'une infinité de façons différentes, il existe une infinité de substitutions s donnant une infinité de non-thèses sx.

Remarque. — Il est évident que le Théorème 38.5 est plus faible que le Théorème 38.4. Il s'applique au CPC, mais j'ignore s'il s'applique à tous les systèmes connectifs dont les évaluantes de Łoś sont des modèles caractéristiques.

Je vais maintenant considérer des règles connectives. Je dirai qu'une telle règle est « organique » ([38.3]) si son conséquent n'est pas toujours une thèse. Une règle à n antécédents est un ensemble de $(n + 1)$-uples, ceux-ci seront dits « des exemples d'application » de la règle; un exemple d'application sera dit « organique » si son dernier terme n'est pas une thèse; les sous-formules de chacun des termes d'un ensemble d'application d'une règle seront dites les « composants » de cet exemple d'application. Ces définitions ne seront utilisées que dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 38.6. — *Pour chaque règle connective et organique,* T*-acceptable dans le CPC, il existe un modèle caractéristique fini du* CPC *dans lequel cette règle n'est pas* D*-valide.*

Je vais donner la démonstration pour un exemple particulier, mais sa généralisation est évidente.

Considérons la règle

$$\mathcal{R} : \quad \neg\neg\neg\neg x \sqsubseteq x.$$

On sait que cette règle est T-acceptable. Un exemple d'application organique est $\langle \neg\neg\neg\neg p_1, p_1 \rangle$; comme il ne contient qu'un seul atome, nous allons considérer l'évaluante de Łoś pour un atome, et c'est en

---

([38.3]) Wajsberg et ses successeurs ont appelé « organique » une formule dont aucune sous-formule n'est une thèse; voir p. ex. Church 1956, § 25.

modifiant cette évaluante qu'on construira celle dont l'existence est affirmée dans l'énoncé du théorème.

L'évaluante de Łoś réduite pour un atome a pour base un ensemble de quatre éléments $\{ A, B, C, D \}$ où

A = ensemble des thèses,
B = » » formules congrues à p_1,
C = » formules congrues à $\neg p_1$,
D = » » négations des thèses.

Le seul élément distingué étant A.

Les constituants de l'exemple d'application considéré plus haut sont p_1, $\neg p_1$ et $\neg \neg p_1$ et de plus on a

$$p_1 \in B,$$
$$\neg \neg p_1 \in B,$$
$$\neg p_1 \in C,$$

Remontons à l'évaluante de Łoś non réduite pour un atome; d'après le Théorème 38.3, c'est un modèle caractéristique du CPC, et si j'ajoute à l'ensemble de ses éléments distingués la formule $\neg \neg p_1$, on aura encore un modèle caractéristique du CPC (Thm. 38.4). Considérons maintenant la partition suivante de la base de cette évaluante : $\{ A', B', C', D', E, F, G \}$ où

$$A' = A,$$
$$B' = B - \{ p_1, \neg \neg p_1 \},$$
$$C' = C - \{ \neg p_1 \}$$
$$D' = D,$$
$$E = \{ p_1 \},$$
$$F = \{ \neg p_1 \},$$
$$G = \{ \neg \neg p_1 \},$$

Cette partition détermine une congruence de l'évaluante obtenue à partir de l'évaluante de Łoś en ajoutant la formule p_1 aux éléments distingués. Donc, par homomorphisme, on obtient un modèle caractéristique du CPC dont la base est l'ensemble de sept éléments A', B', C', D', E, F, G et où il y a deux éléments distingués A' et G. On aura par construction $\neg^* \neg^* E = G$, d'où il résulte que la règle $\mathcal{R}$ n'est pas D-valide puisque G est distingué et E ne l'est pas (voir Thm. 29.1).

Il résulte du Théorème 36.3 que la règle de détachement n'est pas D-valide dans l'évaluante qui vient d'être construite. Il est usuel d'appeler « non-régulières » les évaluantes où cela se produit (voir Church 1953), et il est classique que les évaluantes non-régulières qui sont des modèles caractéristiques du CPC sont des modèles non-normaux.

La généralisation de cette méthode est facile : on considère un exemple d'application organique de la règle dont on s'occupe; si cet exemple d'application contient n atomes différents, on modifie l'évaluante de Łoś pour n atomes; dans cette modification, on ajoute tous les antécédents mais pas les conséquents à l'ensemble des éléments distingués; on considère ensuite une partition de l'ensemble de base de l'évaluante de Łoś où chaque constituant de l'exemple d'application de la règle constitue une classe d'équivalence à lui tout seul, et l'on procède ensuite par homomorphisme.

Il est facile de généraliser le Théorème 38.6 au cas d'un nombre fini de règles connectives et organiques (au lieu d'une seule).

Remarques :

1° Le Théorème 38.6 peut être généralisé à tous les systèmes connectifs dans lesquels existent des analogues aux Théorèmes 38.2, 38.3 et 38.4.

2° Si dans l'énoncé du Théorème 38.6 on supprime le mot « fini », l'énoncé ainsi affaibli s'applique à tous les systèmes connectifs. La démonstration est analogue à celle du Théorème 38.6, mais elle utilise l'évaluante de Lindenbaum avec les Théorèmes 30.1 et 38.5.

3° Au contraire de la propriété énoncée par le Théorème 38.6, il est évident que dans un modèle caractéristique d'un système connectif quelconque une règle connective est T-valide si et seulement si elle est T-acceptable.

CHAPITRE 14.

APPLICATIONS : AUTRES SYSTÈMES CONNECTIFS.

39. Le calcul propositionnel intuitionniste (CPI).

Il est traditionnel de donner ce nom à un système connectif particulier. Les raisons plus ou moins philosophiques qui ont conduit Brouwer et Heyting à créer ce système et à l'appeler « intuitionniste » ne seront pas examinées ici (voir HEYTING 1955).

Plus précisément, je donnerai le nom de CPI au système thétique engendré par le système logistique décrit dans HEYTING 1930 (voir aussi McKINSEY 1939 ou encore McKINSEY-TARSKI 1948, § 4). Ce système logistique lui-même sera appelé ici CPI-H.

Je rappelle que l'alphabet du CPI est constitué par une infinité d'atomes et quatre connecteurs, à savoir : un connecteur unaire $\neg$ (négation), et trois connecteurs binaires $\supset$, &, $\sqcup$ (qui sont respectivement l'implication, la conjonction et la disjonction).

Je rappelle encore quelques propriétés du CPI : $\neg \vdash p_1 \sqcup \neg p_1$ (on n'a pas le « principe du tiers exclu). Par ailleurs, on a

$$\vdash x \sqcup y \iff \vdash x \text{ ou } \vdash y$$

pour toutes formules x et y (résultat conjecturé dans GÖDEL 1932 et démontré dans McKINSEY-TARSKI 1948). On trouvera beaucoup d'autres résultats intéressants dans CHURCH 1956 (§ 26), CURRY 1952, KLEENE1952.

Il est bien connu que le CPC est une extension du CPI qui n'est pas T-conservative : en particulier la « loi de Peirce » n'est pas acceptable dans le CPI, c'est-à-dire qu'on a $\neg \vdash_{\text{CPI}} ((p_1 \supset p_2) \supset p_1) \supset p_1$. Il est moins connu mais également vrai que le CPI est une extension T-conservative du CPC (NK) : voir ŁUKASIEWICZ 1952. Ainsi, quand on s'exprime sans précision, on peut dire à volonté que « le calcul propositionnel classique est une partie du calcul propositionnel intuitionniste » ou que « le calcul propositionnel intuitionniste est une partie du calcul propositionnel classique », ces deux phrases étant l'une et l'autre dépourvues de sens.

Il a été démontré que le CPI n'a pas de modèle caractéristique fini (voir Gödel 1932 ou Church 1956, § 26-12). Le Théorème 38.2 ne se généralise pas au CPI; autrement dit, ses évaluantes de Łoś ne sont pas des modèles caractéristiques (McKinsey-Tarski 1948, Thm. 4.6). De plus, le Théorème 38.3 ne peut pas non plus se généraliser au CPI, autrement dit, ses évaluantes de Łoś réduites ne sont pas finies (McKinsey-Tarski 1948, Thm. 4.5, voir aussi Rieger 1949); le résultat de Diego 1961, concernant le « calcul implicationnel intuitionniste » (voir § 40), en est d'autant plus remarquable.

Le CPI a cependant quelques propriétés simples. En particulier, si l'on définit une fonction connective binaire $\not\equiv$ par

$$x \not\equiv y = (x \supset y) \ \& \ (y \supset x)$$

pour toutes formules x et y, alors, cette fonction connective détermine une congruence, qui est la congruence maximum d'après le Théorème 27.2. Ce dernier résultat, en tenant compte de la Définition 34.1, achève de justifier le résultat de McKinsey 1939 : aucun des quatre connecteurs du CPI n'est définissable contra-connectivement à l'aide des autres.

Il est évident que chaque système connectif qui possède un modèle caractéristique fini est décidable ([39.1]); dans le cas du CPI, qui ne possède pas de modèle caractéristique fini, la décidabilité n'est pas évidente, mais elle est vraie : voir Gentzen 1934, Wajsberg 1937 ou encore Kleene 1952, § 80, Thm. 56.

Il reste encore, au sujet du CPI, beaucoup de problèmes actuellement non résolus (à ma connaissance) et qui sont suggérés par les méthodes et les résultats du travail présent. En particulier, le Théorème 36.4 suggère le problème suivant : Est-ce que toute règle connective T-acceptable dans le CPI est D-acceptable dans le CPI-H ? (autrement dit, est-ce que l'axiomatisation de Heyting, qui utilise la règle de détachement, engendre la déductibilité connective maximum compatible avec le CPC ?)

40. Les calculs implicationnels.

Je donnerai ce nom à divers systèmes formels connectifs dans lesquels il n'existe qu'un seul connecteur, qui est binaire et qui possède certaines des propriétés de l'implication du CPC.

Les principaux de ces calculs sont le « *calcul implicationnel classique* » (CIC) et le « *calcul implicationnel intuitionniste* » (CII), qui sont

([39.1]) Pour la notion de décidabilité, voir les travaux consacrés à la théorie des fonctions récursives, p. ex. Lacombe 1960.*a*.

connus dans la littérature sous des noms divers ([40.1]). L'un et l'autre de ces systèmes sont des systèmes thétiques et ils sont complètement déterminés quand on a défini l'ensemble de leurs thèses ([40.2]). L'ensemble des thèses du CIC est l'ensemble des thèses du CPC qui ne contiennent que le connecteur $\supset$; l'ensemble des thèses du CII est l'ensemble des thèses du CPI qui ne contiennent pas d'autre connecteur que $\supset$ ([40.3]).

On connaît des axiomatisations de ces systèmes thétiques. Pour le CII on peut prendre le système suivant constitué de deux schémas d'axiomes et d'une règle :

$$\mathfrak{A}_{1.1} : \vdash \supset x \supset (y \supset x),$$
$$\mathfrak{A}_{1.2} : \vdash (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z)),$$
$$\mathfrak{R}_{1.d} : x, x \supset y \vdash y.$$

Pour le CIC, il suffit d'ajouter à l'axiomatisation précédente un schéma d'axiomes supplémentaire, à savoir

$$\mathfrak{A}_{1.3} : \vdash ((x \supset y) \supset x) \supset x.$$

Ceci pour toutes formules x, y et z du CII (ou du CIC, puisque ces deux systèmes ont les mêmes formules). Il en résulte que, malgré les apparences, les schémas d'axiomes $\mathfrak{A}_{1.1}$, $\mathfrak{A}_{1.2}$ et la règle $\mathfrak{R}_{1.d}$ ne sont pas identiques respectivement aux schémas d'axiomes $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ ni à la règle $\mathfrak{R}_d$ du CPC (voir § 35) car le CPC contient davantage de formules.

Il résulte immédiatement du Théorème 20.2 que ces axiomatisations du CII et du CIC possèdent la propriété de rattachement par rapport à l'implication. On peut même dire que l'axiomatisation précédente du CII a été faite « sur mesure » pour obtenir la propriété de rattachement.

Par définition, le CIC a un modèle caractéristique fini; à savoir, l'évaluante $\mathfrak{M}_{\text{CIC}}$ obtenue à partir de $\mathfrak{M}_{\text{CPI}}$ (voir § 35) en supprimant dans cette dernière évaluante la fonction homologue à la négation. Il me paraît vraisemblable que le CII n'ait pas de modèle caractéristique fini; mais je ne connais ni démonstration ni réfutation de cette hypothèse.

Pour le CIC, il résulte immédiatement du Théorème 38.3 que les évaluantes de Łoś réduites sont finies. Pour le CII, rien n'est évident, mais les évaluantes de Łoś réduites sont tout de même finies, contrairement à ce qui se passe pour le CPI : voir Diego 1961, généralisant un résultat partiel de Skolem 1952.

Le théorème suivant justifie la remarque 3° du Théorème 27.3.

([40.1]) Voir p. ex. Church 1956, § 26.

([40.2]) Sauf la numérotation de l'alphabet, qui est sans importance dans le paragraphe présent.

([40.3]) Le CII est appelé « positive implicational propositional calculus » dans Church 1956, § 26, et « álgebra de Hilbert » dans Diego 1961.

THÉORÈME 40.1. — *Dans le CIC, la congruence maximum est déterminée pluri-connectivement mais n'est pas déterminée connectivement.*

En effet, d'une part, si l'on pose, pour toutes formules x et y,

$$x \mathrm{E} y \iff \vdash_{\mathrm{CIC}} x \supset y \text{ et } \vdash_{\mathrm{CIC}} y \supset x$$

il résulte des propriétés élémentaires de l'implication que E est une congruence du CIC; d'après le Théorème 27.2, c'est la congruence maximum de ce système.

Il reste à démontrer qu'il n'existe pas, dans le CIC, de fonction connective binaire f telle que $x \mathrm{E} y \iff \vdash f(x, y)$. On voit immédiatement que si f^* est l'homologue de f dans $\mathfrak{M}_{\mathrm{CIC}}$, cette fonction devrait avoir la table de composition suivante :

$f^*(\xi, \eta)$:

ξ \ η	0	1
0	0	1
1	1	0

Mais f devrait être obtenue par superposition à partir de $\supset^*$ et des fonctions projections de $\mathfrak{M}_{\mathrm{CIC}}$. Or, toutes ces fonctions sont antisymétriques, c'est-à-dire si g est l'une d'entre elles, on a

$$g(\xi, \eta) = 0 \iff g(\eta, \xi) = 1.$$

L'antisymétrie étant conservée par superposition, il est impossible de construire de cette façon f^* qui est symétrique.

REMARQUE. — Le raisonnement précédent est possible parce que le CIC a un modèle caractéristique à deux valeurs seulement. Il semble difficile de le généraliser à d'autres cas.

41. Les systèmes modaux.

On appelle souvent dans la littérature « logiques modales » des systèmes formels qui sont en fait des calculs connectifs (systèmes thétiques ou systèmes logistiques) qui contiennent un ou deux connecteurs unaires qui sont sensés formaliser la notion de « nécessité », la notion de « possibilité » ou les deux ([41.1]). Ce sont ces calculs que j'appelle des systèmes modaux.

Je me limiterai ici aux systèmes modaux qui sont des extensions du CPC. Même avec cette limitation, il existe un grand nombre de

([41.1]) Pour d'autres genres de systèmes modaux, voir p. ex. PRIOR 1955. Pour un calcul des prédicats avec modalités, voir BARCAN 1946.*a*.

systèmes modaux différents ([41.2]). En fait, le paragraphe présent traitera uniquement de quelques systèmes modaux qui me paraissent avoir un intérêt particulier et dans lesquels j'aurai l'occasion d'appliquer certaines théories générales développées plus haut. Les systèmes dont il sera question seront au nombre de cinq, à savoir : CMM (« calcul modal minimal »), CMM_2 (« calcul modal minimal avec deux connecteurs modaux »), CMW (« calcul modal de von Wright »), S 4 et S 5. Le CMW est le système étudié sous le nom de « M » et défini dans VON WRIGHT 1951, ou plus exactement, un système équipollent qui avait été défini implicitement dans GÖDEL 1932.*a*; de même, S 4 et S 5 ne sont pas exactement les systèmes étudiés sous les mêmes noms dans LEWIS-LANGFORD 1932, mais les systèmes équipollents définis dans GÖDEL 1932.*a* (Lewis et Langford ainsi que la majorité de leurs successeurs, y compris von Wright, considéraient de préférence des systèmes où les connecteurs étaient la négation, la conjonction et la possibilité, tandis que dans les systèmes considérés ici les connecteurs sont la négation, l'implication et la nécessité). Dans ce qui suit, le connecteur de nécessité sera appelé « L », et la possibilité (connecteur ou fonction connective) sera appelée « M » ([41.3]).

Le CMM est une extension du CPC qui est dite ici minimale parce qu'il paraît difficile d'imposer des conditions moins strictes au connecteur supplémentaire L, étant donné que je ne lui impose aucune condition. Plus précisément, le CMM est le système thétique engendré par le système logistique qui est défini par les trois schémas d'axiomes et la règle qui suivent :

$\mathfrak{A}_{2.1}$: $\vdash x \supset (y \supset x)$,

$\mathfrak{A}_{2.2}$: $\vdash (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$.

$\mathfrak{A}_{2.3}$: $\vdash (\neg x \supset \neg y) \supset (y \supset x)$.

$\mathfrak{R}_{2.4}$: $x,\ x \supset y \vdash y$.

Contrairement aux apparences, ce système n'est pas identique au CPC-FL, car x, y et z sont ici des formules quelconques du CMM et que le CMM a davantage de formules que le CPC. En fait, les propriétés globales du CMM sont entièrement différentes de celles du CPC : en particulier le CPC est une réalisation du cas (1) du Théorème 27.3, tandis que le CMM est une réalisation du cas (2) du même théorème, comme on va le voir.

([41.2]) En particulier, on peut distinguer une lignée dont les représentants les plus marquants se trouvent dans LEWIS-LANGFORD 1932 (voir aussi von WRIGHT 1951 et PORTE 1956.*a*), et une autre lignée commençant avec un système dû à Łukasiewicz (*Journal of Computing Systems*, vol. 1, 1953, pp. 111-149) et étudié également dans PORTE 1962.*b*.

([41.3]) On écrit « M » à cause du mot allemand « Möglichkeit »; l'usage de « L » pour désigner la nécessité semble être purement conventionnel.

THÉORÈME 41.1. — *Dans le CMM, et pour toutes formules x et y, on a*

$$x = y \quad \Rightarrow \quad \vdash \mathrm{L}x \supset \mathrm{L}y.$$

Démonstration. — Il est évident que la condition de gauche entraîne celle de droite. Il reste à démontrer la réciproque. Je vais appeler « formules modales » les formules atomiques et les formules qui commencent par L; une sous-formule modale maximale d'une formule quelconque a sera une formule modale qui est une sous-formule de a et qui est telle que si elle est une sous-formule d'une sous-formule modale de a, elle est identique à cette dernière. Je vais maintenant définir une traduction particulière t de CMM dans CPC. Les formules modales étant en infinité dénombrable, on peut leur faire correspondre de façon bi-univoque des formules atomiques; il suffit de numéroter par un procédé quelconque les formules modales et de poser, m_k étant la k-ième formule dans cette numérotation, $t(m_k) = p_k$; on complète la définition de la traduction en posant

$$t(\neg x) = \neg (tx),$$
$$t(x \supset y) = (tx) \supset (ty).$$

Il est évident que t est une application bi-univoque de l'ensemble des formules du CMM sur l'ensemble des formules du CPC. Mais on a de plus

$$(1) \qquad \vdash_{\mathrm{CMM}} x \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{CPC}} tx$$

pour toute formule x. En effet, cette propriété est vraie pour les axiomes et conservée par la règle (qu'il s'agisse des axiomes et de la règle du CMM ou des axiomes et de la règle du CPC-FL).

Revenons maintenant à la formule $\mathrm{L}x \supset \mathrm{L}y$ (du CMM). Sa traduction sera $t(\mathrm{L}x) \supset t(\mathrm{L}y)$ c'est-à-dire $p_j \supset p_k$ avec $j = k \Leftrightarrow x = y$, ce qui complète la démonstration du Théorème 41.1.

THÉORÈME 41.2. — *Le CMM est équipollent à lui-même selon un couple de traductions contra-connectives qui ne se réduisent pas à l'identité.*

En fait, ces traductions sont les suivantes : τ défini par

$$\tau(\neg x) = \neg (\tau x),$$
$$\tau(x \supset y) = (\tau x) \supset (\tau y),$$
$$\tau(\mathrm{L}x) = \neg \mathrm{L} \neg (\tau x)$$

et τ' identique à τ.

En effet, on voit que la traduction τ consiste à remplacer dans toute formule chaque occurrence de L par une occurence du sous-mot $\neg \mathrm{L} \neg$; il s'ensuit qu'on a $t\tau x = \sigma t x$, où σ est une substitution du CPC qui est inversible, c'est-à-dire qu'on a

$$\vdash_{\mathrm{CPC}} \sigma x' \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{CPC}} x',$$

il s'ensuit, en appliquant la condition (1) démontrée avec le Théorème 41.1, qu'on a

$$\vdash_{\mathrm{CMM}} x \iff \vdash_{\mathrm{CMM}} \tau x,$$

ce qui démontre le théorème.

Ceci justifie la remarque 3° du Théorème 32.7, ainsi que la remarque 1° du Théorème 33.4. De plus, on a par exemple

$$\tau'\tau \mathrm{L} p_1 = \neg\neg \mathrm{L} \neg\neg p_1$$

ce qui, joint au Théorème 41.1, montre que $\tau'\tau x$ n'est pas toujours congru à x.

Le système CMM_2 est le système obtenu en adjoignant à l'alphabet du CPC deux connecteurs unaires L et M et qui est engendré par un système logistique défini par trois schémas d'axiomes et une règle qui s'écrivent exactement comme les schémas d'axiomes et la règle qui définissent le CMM (mais ce ne sont pas les mêmes axiomes, ni la même règle car il y a davantage de formules).

Le CMM_2 a des propriétés très analogues à celles du CMM. En particulier sa seule congruence est l'identité. Il s'ensuit (voir Déf. 34.1) qu'aucun connecteur n'est définissable à l'aide des autres. Ainsi, M n'est pas définissable à partir de L et des autres connecteurs, contrairement à ce qu'on aurait pu penser *a priori* par suite du fait que le sous-système de CMM_2 constitué par les formules qui ne contiennent pas L est isomorphe au CMM, tandis que le sous-système constitué par les formules qui ne contiennent pas M est le CMM lui-même ([11.4]).

CMW, S 4 et S 5 sont des systèmes thétiques dont les connecteurs sont uniquement $\neg$, $\supset$ et L. S 4 est engendré par le système logistique S 4.1 déterminé par les six schémas d'axiomes et les deux règles de déduction qui suivent :

$\mathfrak{A}_{4.1}$: $\vdash x \supset (y \supset x)$,
$\mathfrak{A}_{4.2}$: $\vdash (x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$,
$\mathfrak{A}_{4.3}$: $\vdash (\neg x \supset \neg y) \supset (y \supset x)$,
$\mathfrak{A}_{4.4}$: $\vdash \mathrm{L}(x \supset y) \supset (\mathrm{L}x \supset \mathrm{L}y)$,
$\mathfrak{A}_{4.5}$: $\vdash \mathrm{L}x \supset x$,
$\mathfrak{A}_{4.6}$: $\vdash \mathrm{L}x \supset \mathrm{LL}x$,
$\mathfrak{R}_{4.f}$: $x,\ x \supset y \vdash y$,
$\mathfrak{R}_{4.g}$: $x \vdash \mathrm{L}x$.

CMW est le système thétique engendré par le système logistique obtenu à partir de S 4.1 en supprimant le schéma d'axiomes $\mathfrak{A}_{4.6}$. S 5 est

([11.4]) Dans la littérature, les traductions τ et τ' telles que $\tau(\mathrm{L}x) = \neg \mathrm{M} \neg (\tau x)$ et $\tau'(\mathrm{M}x') = \neg \mathrm{L} \neg (\tau' x')$ sont implicites (voir p. ex. Prior 1955, Ch. 1). Donc, dans le CMM, le connecteur M peut être considéré aussi bien comme possibilité que comme nécessité.

le système thétique engendré par le système logistique S 5.1 obtenu à partir de S 4.1 en y remplaçant le schéma d'axiomes $\mathfrak{A}_{4.6}$ par

$$\mathfrak{A}_{5.6}: \quad \vdash \neg\, \mathrm{L}\, x \supset \mathrm{L}\, \neg\, \mathrm{L}\, x.$$

Ces trois systèmes logistiques sont contenus, implicitement ou explicitement, dans Gödel 1932.*a*; des systèmes identiques ou équipollents à celui qui engendre CMW ont été retrouvés plusieurs fois (de façon indépendante, semble-t-il) dans la littérature ([41.5]).

Le problème de savoir si CMW peut être engendré par un système logistique connectif fini ayant $\mathfrak{R}_{1.1}$ comme seule règle de déduction est un problème ouvert depuis longtemps, et que je laisserai ouvert. Par contre, les problèmes analogues se résolvent facilement pour S 4 et S 5. Ainsi S 4 est engendré par le système logistique S 4.2 déterminé par les sept schémas d'axiomes et la règle de détachement qui suivent :

$$\mathfrak{A}_{4'.1}: \quad \vdash \mathrm{L}\,(x \supset (y \supset x)).$$
$$\mathfrak{A}_{4'.2}: \quad \vdash \mathrm{L}\,((x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))).$$
$$\mathfrak{A}_{4'.3}: \quad \vdash \mathrm{L}\,((\neg\, x \supset \neg\, y) \supset (y \supset x)).$$
$$\mathfrak{A}_{4'.4}: \quad \vdash \mathrm{L}\,(\mathrm{L}\,(x \supset y) \supset (\mathrm{L}\, x \supset \mathrm{L}\, y)).$$
$$\mathfrak{A}_{4.5}: \quad \vdash \mathrm{L}\, x \supset x,$$
$$\mathfrak{A}_{4'.5}: \quad \vdash \mathrm{L}\,(\mathrm{L}\, x \supset x),$$
$$\mathfrak{A}_{4'.6}: \quad \vdash \mathrm{L}\,(\mathrm{L}\, x \supset \mathrm{LL}\, x).$$
$$\mathfrak{R}_{4.d}: \quad x,\ x \supset y \vdash y.$$

Pour engendrer S 5 on définirait un système logistique S 5.2 en remplaçant simplement $\mathfrak{A}_{4'.6}$ par

$$\mathfrak{A}_{5'.6}: \quad \vdash \mathrm{L}\,(\neg\, \mathrm{L}\, x \supset \mathrm{L}\, \neg\, \mathrm{L}\, x).$$

Je rappelle que S 4 est une extension de CMW et que S 5 est une extension de S 4; de plus, ces extensions sont « propres » c'est-à-dire que S 5 contient davantage de thèses que S 4 et que S 4 contient davantage de thèses que CMW. Le système S 4 présente un intérêt spécial, d'une part à cause de ses liens étroits avec la topologie générale (voir McKinsey 1941 ou McKinsey-Tarski 1948), d'autre part à cause de ses liens étroits avec le CPI (voir McKinsey-Tarski 1948). Dans le dernier texte cité on démontre qu'il existe des traductions contra-connectives du CPI dans S 4. Existe-t-il aussi une ou plusieurs traductions contra-connectives de S 4 dans le CPI ? Ceci est encore, à ma connaissance, un problème ouvert.

([41.5]) Le système CMW était appelé « T » dans un article de Feys (*Revue Néoscholastique de Philosophie*, vol. 40, 1937, pp. 517-553, et vol. 41, 1938, pp. 217-252). Voir aussi von Wright 1951 et Porte 1956.*a*.

Le système S 5 présente également un intérêt spécial, en particulier à cause de ses liens avec le « calcul des prédicats » (voir Wajsberg 1937, ou encore comparer Quine 1945 avec Carnap 1946).

On peut démontrer sans difficulté que S 4.1 et S 4.2 sont T-équivalents, et il en est de même pour S 5.1 et S 5.2. Mais S 4.1 et S 4.2 ne sont pas D-équivalents, pas plus que S 5.1 et S 5.2, comme nous allons le voir.

En effet, d'après le Théorème 20.2, le système S 4.2 possède la propriété de rattachement par rapport à l'implication (évident); par ailleurs, toujours d'après le même Théorème 20.2, et en faisant quelques calculs élémentaires, on trouve que le système S 4.1 possède la propriété de rattachement pour la fonction connective d définie par $d(x, y) = \mathrm{L}x \supset y$ (résultats analogues par les mêmes méthodes pour S 5.1 et S 5.2). Maintenant, si S 4.1 et S 4.2 étaient D-équivalents, la règle $\mathscr{R}_{1,g}$ serait D-acceptable dans S 4.2; d'où l'on conclurait, par rattachement, $\vdash_{S_4} p_1 \supset \mathrm{L}p_1$ et il est bien connu que ceci est faux ([11.6]).

Le Théorème 36.4 suggère les problèmes suivants: Est-ce que la déductibilité de S 4.1 est la déductibilité connective maximum qui engendre S 4? Est-ce que la déductibilité de S 5.1 est la déductibilité connective maximum qui engendre S 5 ? Je ne connais pas la réponse à ces questions.

42. Quelques autres systèmes.

On a souvent considéré dans la littérature des systèmes connectifs définis en donnant comme ensemble des thèses l'ensemble des formules valides dans une évaluante finie (voir en particulier Łukasiewicz-Tarski 1930 et Rosser-Turquette 1952). Dans le cas du calcul dit « trivalent » de Łukasiewicz, on voit facilement que, d'une part on n'a pas la propriété de rattachement pour l'implication, d'autre part, on a la propriété de rattachement pour la fonction connective d définie par $d(x, y) = x \supset (x \supset y)$ (en employant la notation de Church à la place de celle de Łukasiewicz : voir Church 1956, § 19.8).

Enfin, le résultat suivant est bien connu (il est cité sans démonstration ni référence dans McKinsey-Tarski 1948); la démonstration qui suit est, à ma connaissance, nouvelle.

Théorème 42.1. — *Le système thétique défini pour démontrer le cas* (2) *du Théorème* 27.3 *n'a pas de modèle caractéristique fini.*

([11.6]) On a des résultats analogues pour S 5, S 5.1 et S 5.2; de même, le calcul des prédicats de premier ordre peut être engendré par un système logistique comportant deux règles primitives, à savoir la règle de détachement et la règle de généralisation (quelque peu analogue à $\mathscr{R}_{4,g}$), comme dans le système classique exposé dans Church 1956, Ch. 3, ou bien par un système logistique qui ne comprend pas d'autre règle primitive que la règle du détachement (voir p. ex. Quine 1951 ou Porte 1957).

Le raisonnement se fera par l'absurde. Pour simplifier les écritures, je poserai $f(a) = \mathrm{C}^* aa$ (a étant une valeur quelconque d'un modèle caractéristique donné). Soit D l'ensemble des valeurs distinguées du modèle. Posons, en indiquant l'itération d'une fonction unaire par des exposants,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 &= f(\mathrm{D}), \\ \mathrm{D}_{k+1} &= f(\mathrm{D}_k), \\ &= f^{k+1}(\mathrm{D}) \end{aligned}$$

pour chaque entier k. Il s'ensuit

$$\ldots \mathrm{D}_{k+1} \subseteq \mathrm{D}_k \ldots \subseteq \mathrm{D}_1 \subseteq \mathrm{D}.$$

Si la base de l'évaluante était finie, D serait également fini, et les inclusions précédentes ne pourraient pas toujours être strictes; autrement dit, il existerait un entier j tel que $\mathrm{D}_{j+1} = \mathrm{D}_j$ c'est-à-dire $f(\mathrm{D}_j) = \mathrm{D}_j$. Il s'ensuivrait que la fonction f limitée à D_j serait une permutation. Si n est le nombre des éléments de D_j on aurait donc $f^{n!+1}(b) = f(b)$ pour chaque b appartenant à D_j. Mais $f^{j+1}(a) \in \mathrm{D}_j$ pour tout élément a de la base de l'évaluante; et l'on aurait donc $f^{(j+1)(n!+1)}(a) = f^{j+1}(a)$ pour tout a appartenant à la base, d'où $\mathrm{C}^*(f^{(j+1)(n!+1)}(a))(f^{j+1}(a)) \in \mathrm{D}$ pour tout élément a de la base. Comme l'itération de la fonction connective homologue à f conduit toujours à allonger les formules, on aurait deux formules différentes x et y telles que $\vdash \mathrm{C}xy$, ce qui contredit la définition du système connectif.

RÉFÉRENCES.

ACKERMANN 1956 :

ACKERMANN (W.). — Review of SŁUPECKI 1953 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 21 (1956), pp. 87-88.

AJDUKIEWICZ 1958 :

AJDUKIEWICZ (Kazimierz). — Three concepts of Definition — *Logique et Analyse*, 1re année (1958), pp. 115-126.

ALBAN 1943 :

ALBAN (M. J.). — Independance of the primitive symbols of Lewis calculus of propositions — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 8 (1943), pp. 25-26.

ANDERSON 1954 :

ANDERSON (A. R.). — Improved decision procedures for Lewis's calculus S 4 and von Wright's calculus M — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19 (1954), pp. 201-214.

ANDERSON-BELNAP 1959 :

ANDERSON (A. R.) and BELNAP (N. D.). — A simple treatment of truth functions — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (December 1959), pp. 301-302.

BARCAN 1946.*a* :

BARCAN (Ruth C.). — A functional calculus of first order based on strict implication — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 11 (1946), pp. 1-16.

BARCAN 1946.*b* :

BARCAN (Ruth C). — The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 11 (1946), pp. 115-118.

BERNSTEIN 1937 :

BERNSTEIN (B. A.). — Remark on Nicod's reduction of Principia Mathematica — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), pp. 165-166.

BETH 1959 :

BETH (E. W.). — *The foundations of Mathematics* — Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1959.

BIRKHOFF 1948 :

BIRKHOFF (Garret). — *Lattice Theory*, revised edition — New York (American Mathematical Society), 1948.

BOURBAKI 1939 :

BOURBAKI. — *Théorie des ensembles; fascicule de résultats* — Paris (Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », n° 846), 1939.

BOURBAKI 1942 :

BOURBAKI. — *Algèbre*. Ch. 1 : *Structures algébriques* — Paris (Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », n° 934), 1942.

BOURBAKI 1954 :

BOURBAKI. — *Théorie des ensembles*, Chs I et II — Paris (Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », n° 1212), 1954.

BOURBAKI 1956 :

BOURBAKI. — *Théorie des ensembles*, Ch. III — Paris (Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », n° 1243), 1956.

BOURBAKI 1957 :

BOURBAKI. — *Théorie des ensembles*, Ch. IV — Paris (Hermann, « Actualités scientifiques et industrielles », n° 1258), 1957.

CARNAP 1946 :

CARNAP (Rudolf). — Modalities and quantification — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 11 (1946), pp. 33-64.

CHURCH 1941 :

CHURCH (Alonzo). — *The calculi of λ-conversion* — Princeton (University Press), 1941.

CHURCH 1953 :

CHURCH (Alonzo). — Non-normal Truth-tables for the propositional calculus — *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 10 (1953), pp. 41-52.

CHURCH 1954 :

CHURCH (Alonzo). — *Some Examples of Strongly Non-normal Characteristic Systems of Truth-Tables for the Propositional Calculus* — Mimeographed, 1 p. — Dated : March 12, 1954.

CHURCH 1956 :

CHURCH (Alonzo). — *Introduction to Mathematical Logic*, 2e édition, vol. 1 — Princeton (University Press), 1956.

CHURCH-RESCHER 1950 :

CHURCH (Alonzo) and RESCHER (Nicholas). — Review of DIENES 1949 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15 (1950), pp. 69-70.

COPI 1954 :

COPI (Irving M.). — *Symbolic Logic* — New York (The McMillan Co.), 1954.

CURRY 1952 :

CURRY (Haskell B.). — *Leçons de Logique algébrique* – Paris et Louvain, 1952.

CURRY 1954 :

CURRY (Haskell B.). — Generalizations of the deduction theorem — *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. II, pp. 399-400 — Amsterdam, 1954.

CURRY 1958 :

CURRY (Haskell B.). — On Definitions in Formal Systems — *Logique et Analyse*, 1re année (1958), pp. 105-114.

CURRY 1958.*a* :

CURRY (H. B.). — The tectonic Property for Calculuses — *International Congress of Mathematicians : Abstracts of short communications*, p. 6 — Edinburgh, 1958.

CURRY 1960 :

CURRY (H. B.). — The inferential approach to logical calculus, part I — *Logique et Analyse*, 3e année (1960), pp. 119-136.

CURRY-FEYS 1958 :

CURRY (Haskell B.) and FEYS (Robert). — *Combinatory Logic*, vol. I — Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1958.

DAVIS 1958 :

DAVIS (Martin). — *Computability and Unsolvability* — New York (McGraw Hill), 1958.

DIEGO 1961 :

DIEGO (Antonio). — *Sobre Álgebras de Hilbert* — Buenos-Aires, 1961.

DIENES 1949 :

DIENES (Z. P.). — On an implication function in many-valued systems of logic — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), pp. 95-97.

DOPP 1950 :

DOPP (J.). — *Leçons de logique formelle* — 3 vol. — Louvain, 1949-1950.

DOPP 1962 :

DOPP (J.). — *Notions de logique formelle* — 3 vol. — Louvain, 1962.

DUBREIL 1946 :

DUBREIL (Paul). — *Algèbre*, t. 1 — Paris (Gauthiers-Villars), 1946.

DUBREIL-DUBREIL-JACOTIN 1961 :

DUBREIL (Paul) et DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise). — *Leçons d'Algèbre moderne* — Paris (Dunod), 1961.

DUBREIL-LESIEUR-CROISOT 1953 :

DUBREIL-JACOTIN (Marie-Louise), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). — *Leçons sur la Théorie des treillis* — Paris (Gauthier-Villars), 1953.

Dugundji 1940 :

Dugundji (James). — Note on a property of matrices for Lewis and Langford calculi of propositions — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 5 (1940), pp. 150-151.

Dummet 1959 :

Dummet (Michael). — A propositional calculus with denumerable matrix — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959), pp. 97-106.

Fraïssé 1953 :

Fraïssé (R.). — Sur quelques classifications des systèmes de relations — *Alger-Mathématiques*, t. 1 (1954), pp. 35-182.
(Thèse de doctorat soutenue à Paris le 29 octobre 1953.)

Fraïssé 1963 :

Fraïssé (R.). — *Cours de Logique mathématique. Sémantique* — Paris (Institut Blaise Pascal), 1963 — Miméographié.

Frege 1879 :

Frege (Gottlob). — *Begriffsschrift* — Halle a/s, 1879.

Gentzen 1934 :

Gentzen (Gerhard). — Untersuchungen über das logische Schlissen — *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39 (1934), pp. 176-210 et 405-431.
(Cité d'après la traduction française de Feys et Ladrière : *Recherches sur la déduction logique*, Paris, P. U. F., 1955.)

Gödel 1932 :

Gödel (Kurt). — Zum intuitionistischen Aussagenkalkül — *Ergebnisse eines mathematische Kolloquium*, Heft 4 (1933), p. 40.

Gödel 1932.*a* :

Gödel (Kurt). — Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls — *Ergebnisse eines mathematischen Kolloqium*, Heft 4 (1933), pp. 39-40.

Gödel 1940 :

Gödel (Kurt). — *The consistency of the continuum hypothesis* — Princeton (Annals of Mathematical Studies, n° 3), 1940.

Hailperin 1944 :

Hailferin (Theodore). — A set of axioms for logic — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 9 (1944), pp. 1-19.

Halmos 1956 :

Halmos. — The basic concept of algebric logic — *Amer. Math. Monthly*, vol. 63 (1956), p. 368.

Harrop 1958 :

Harrop (R.). — On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi — *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 54 (1958), pp. 1-13.

HAO WANG 1950 :

HAO WANG. — A formal system of logic — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15 (1950), pp. 25-32.

HENKIN 1949 :

HENKIN (L.). — The completeness of the first order functional calculus — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), pp. 159-166.

HENKIN 1949.*a* :

HENKIN (Leon). — Fragments of the propositional calculus — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), pp. 42-48.

HENKIN 1955 :

HENKIN (Leon). — The representation theorem for cylindrical algebras — *Mathematical Interpretations of Formal Systems*, pp. 85-97 — Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1955.

HENKIN 1959 :

HENKIN (Leon). — Some remarks on infinitely long formulas — *Infinistic Methods*, pp. 167-183 — Varsovie (aussi : New-York, Pergamon Press), 1959.

HERBRAND 1930 :

HERBRAND (Jacques). — *Recherches sur la Théorie de la démonstration* — Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III (Sciences mathématiques et physiques), n° 33 — Varsovie, 1930.

HEYTING 1930 :

HEYTING (A.). — Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik — *Sitzunberichte der Preussichen Akademie der Wissenschaften. Physikalische-mathematische Klasse*, 1930, pp. 42-56.
(Cité d'après McKINSEY 1939.)

HEYTING 1934 :

HEYTING (Arend). — *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus, Beweistheorie* — Berlin (Springer), 1934.
(Cité d'après la traduction française révisée, qui est HEYTING 1955.)

HEYTING 1955 :

HEYTING (A.). — *Les fondements des mathématiques, Intuitionisme. Théorie de la démonstration* — Paris (Gauthier-Villars), 1955.
(Traduction française de HEYTING 1934, révisée et augmentée par l'auteur.)

HILBERT-ACKERMANN 1928 :

HILBERT (D.) und ACKERMANN (W.). — *Grundzüge der Theoretischen Logic* — Berlin, 1928.

HILBERT-ACKERMANN 1938 :

(C'est la 2e édition, fortement modifiée par HILBERT-ACKERMANN 1928.)

HILBERT-ACKERMANN 1950 :

(C'est la traduction anglaise de HILBERT-ACKERMANN 1938, avec corrections et notes par Robert E. Luce : *Principles of Mathematical Logic*, New-York, 1950.)

HIŻ 1957 :

HIŻ (H.). — Complete sentential calculus admitting extensions — *Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University* (Miméographié), pp. 260-262.

HIŻ 1958 :

HIŻ (H.). — A warning about translating axioms — *Amer. Math. Monthly*, vol. 65 (1958), pp. 613-614.

HIŻ 1959 :

HIŻ (H.). — Extendible sentential calculus — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959), pp. 193-202.

KALICKI 1948 :

KALICKI (Jan). — On Tarski's matrix method — *C. R. des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, vol. 41 (1948), pp. 130-142.

KALICKI 1950.*a* :

KALICKI (Jan). — Note on truth-tables — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15 (1950), pp. 174-181.

KALICKI 1950.*b* :

KALICKI (Jan). — A test for the existence of tautologies according to many-valued truth-tables — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 15 (1950), pp. 182-184.

KALICKI 1951 :

KALICKI (Jan). — Review of Łoś 1949 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 16 (1951), pp. 59-61.

KALICKI 1952 :

KALICKI (Jan). — A test for the equality of truth-tables — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 17 (1952), pp. 161-163.

KALICKI 1954 :

KALICKI (Jan). — An undecidable problem in the algebra of truth-tables — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19 (1954), pp. 172-176.

KALMÁR 1935 :

KALMÁR (László). — Ueber die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls — *Acta Scientiarum mathematicarum* (Szeged), vol. 7 (1935), pp. 222-243.

KEMENY 1948 :

KEMENY (J. G.). — Models of logical systems — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 13 (1948), pp. 16-30.

KLEENE 1952 :

KLEENE (Stephen Cole). — *Introduction to metamathematics* — New-York (Van Nostrand), 1952.

L'ABBÉ 1953 :

L'ABBÉ (Maurice). — Review of DOPP 1950 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 18 (1953), pp. 276-277.

LACOMBE 1960 :

LACOMBE (D.). — *Théorie des fonctions récursives et applications* — Paris (Institut Blaise Pascal), 1960 — Miméographié.

LACOMBE 1960.*a* :

LACOMBE (Daniel). — La théorie des fonctions récursives et ses applications — *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 88 (1960), pp. 393-468.

LEBLANC 1961 :

LEBLANC (Hughes). — The Algebra of Logic and the Theory of Deduction — *The Journal of Philosophy*, vol. 58, n° 19 (September 1961), pp. 553-558.

LEBLANC 1962 :

LEBLANC (Hughes). — Boolean Algebra and the Propositional Calculus — *Mind*, vol. 71, n° 283 (1962), pp. 384-386.

LEWIS-LANGFORD 1932 :

LEWIS (C. I.) and LANGFORD (C. H.). — *Symbolic Logic* — New-York (Dover), 1932.

LORENZEN 1955 :

LORENZEN (Paul). — *Einführung in die operative Logik und Mathematik* — Berlin (Springer), 1955.

ŁOŚ 1949 :

ŁOŚ (Jerzy). — *O matrycach logicznych* — Wroclaw, 1949 (voir KALICKI 1951).

ŁOŚ-SUSZKO 1958 :

ŁOŚ (Jerzy) and SUSZKO (Roman). — Remarks on sentential logics — *Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen*, Ser. A, t. 61 (1958), pp. 177-183.

ŁUKASIEWICZ 1952 :

ŁUKASIEWICZ (Jan). — On the intuitionist theory of deduction — *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen*, Ser. A, vol. 55 (1952), pp. 202-211.

ŁUKASIEWICZ-TARSKI 1930 :

ŁUKASIEWICZ (Jan) und TARSKI (Alfred). — Untersuchungen über den Aussagenkalkül — *C. R. des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. 3, vol. 23 (1930), pp. 30-50.
(Cité d'après la traduction anglaise, qui est le chapitre 4 de TARSKI 1956).

McKinsey 1936 :

McKinsey (J. C. C.). — On the independance of Hilbert and Ackermann's postulates for the calculus of propositional functions — *American Journal of Mathematics*, vol. 58 (1936), pp. 336-344.

McKinsey 1939 :

McKinsey (J. C. C.). — Proof of the independance of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions — *Journal of Symbolic logic*, vol. 4 (1939), pp. 155-158.

McKinsey 1941 :

McKinsey (J. C. C.). — A solution of the decision problem for the Lewis systems S 2 and S 4, with an application to topology — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 6 (1941), pp. 117-134.

McKinsey-Tarski 1948 :

McKinsey (J. C. C.) and Tarski (A.). — Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 13 (1948), pp. 1-15.

Markov 1954 :

Markov (A. A.). — *Teoriia Algorifmov* — Trudy Mat. Steklov. nº 42— Izdat. Akad. Nauk S. S. S. R. — Moscou 1954.
(Cité d'après la traduction anglaise : *Theory of Algorithms.*)

Montague-Henkin 1956 :

Montague (Richard) and Henkin (Leon). — On the definition of « formal deduction » — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 21 (1956), pp. 129-136.

Monteiro 1960 :

Monteiro (António). — Matrices de Morgan caractéristiques pour le calcul propositionnel classique — *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, vol. 32 (1960), pp. 1-7.

Moh Shaw-Kwei 1950 :

Moh Shaw-Kwei. — The deduction theorems and two new logical systems — *Methodos*, vol. 2 (1950), pp. 56-75.

Nachbin 1948 :

Nachbin (L.). — Sur les espaces topologiques ordonnés — *C. R. A. S.*, Paris, t. 226 (1948), p. 381.
(Cité par Fraïssé 1953, § 1.5.)

Porte 1956.*a* :

Porte (J.). — Recherches sur les logiques modales — *Le raisonnement en mathématique et en sciences expérimentales* (70e Colloque international du C. N. R. S., septembre 1956, pp. 117-126) — Paris (Éd. du C. N. R. S.), 1958.

Porte 1957 :

Porte (J.). — Un système de postulats pour le calcul des prédicats — *C. R. A. S.*, Paris, t. 245 (1957), pp. 817-819.

PORTE 1958 :

PORTE (J.). — Une simplification de la Théorie de Turing — *Comptes-rendus du 1er Congrès international de Cybernétique* (Namur, 1956) — Paris (Gauthier-Villars), 1958.

PORTE 1958.*a* :

PORTE (J.). — Review of CHURCH 1956 — *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, vol. 81 (1957), 1re partie, pp. 160-165.

PORTE 1958.*c* :

PORTE (J.). — Deux systèmes simples pour le calcul des propositions — *Alger-Mathématiques*, vol. 5 (1958), pp. 5-16.

PORTE 1958.*d* :

PORTE (J.). — Une propriété du calcul intuitionniste — *Proc. Koninkl. Nerderl. Akad. van Wetenschappen*, Ser. A, vol. 60 (1958), pp. 361-365 (Contient une erreur corrigée dans ROBINSON 1959.)

PORTE 1958.*e* :

PORTE (J.). — Derived rules and non-normal matrices in the propositional calculus — *International Congress of Mathematicians : Abstracts of short communications* — Edinburgh, 1958.

PORTE 1958.*f* :

PORTE (J.). — Schémas pour le calcul des propositions fondé sur la conjonction et la négation — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 23 (1958), pp. 421-431.

PORTE 1959 :

PORTE (J.). — Systèmes de Post, algorithmes de Markov — *Cybernetica*, vol. 1 (1958), n° 2, pp. 114-149.
(Publié en 1959) — (Les tirés à-part sont repaginés de 1 à 36.)

PORTE 1960.*a* :

PORTE (J.). — *Congruences over connective calculi* — Paris 1960, 2 pp. mim. (Abstract destiné au « 1960 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science » tenu à Stanford en août 1960).

PORTE 1960.*c* :

PORTE (J.). — Un système pour le calcul des propositions où la règle de détachement n'est pas valable — *C. R. A. S.*, Paris, t. 251 (1960), pp. 188-189.

PORTE 1961.*a* :

PORTE (J.). — Quelques extensions du théorème de déduction — *Revista de la Union Matemática Argentina*, vol. 20 (1960), pp. 259-266. (Texte écrit en 1961 et imprimé en 1962.)

PORTE 1962 :

PORTE (J.). — Un système logistique très faible pour le calcul propositionnel classique — *C. R. A. S.*, Paris, t. 254 (1962), pp. 2500-2502.

PORTE 1962.*a* :

PORTE (J.). — An associativity Lemma — *International Congress of Mathematicians : Abstracts of short communications*, p. 10 — Stockholm, 1962.

PORTE 1962.*b* :

PORTE (J.). — The Ω-system and the Ł-system of modal logic. — *Colloquium on non-classical logics : Abstracts of papers* — Helsinki, 1962 — Miméographié, 2 pp.

PORTE-VILLE-HÉRAULT 1963 :

PORTE (J.). — *Cours de Logique mathématique*; *Syntaxe* — Rédigé avec la collaboration de VILLE (Françoise) et HÉRAULT (Daniel) — Paris (Institut Blaise Pascal), 1963.

POST 1936 :

POST (Emil L.). — Finite combinatory process; formulation I — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), pp. 103-105.

POST 1941 :

POST (Emil L.). — *The two-valued iterative systems of mathematical logic* — Princeton (University Press : « Annals of Mathematical Studies », nº 5), 1941.
(Cité d'après VAUGHAN 1941.)

POST 1943 :

POST (Emil L.). — Formal reductions of the general combinatorial problem — *American Journal of Mathematics*, vol. 65 (1943), pp. 197-215.

PRIOR 1955 :

PRIOR (A. N.). — *Formal Logic* — Oxford (Clarendon Press), 1955.

PRIOR 1957 :

PRIOR (A. N.). — *Time and modality* — Oxford (Clarendon Press), 1957.

QUINE 1940 :

QUINE (Willard van Orman). — *Mathematical Logic*, Cambridge, Mass. (Harvard University Press), 1940.
(Contient une inconsistance corrigée ultérieurement dans HAO WANG 1950 — Voir QUINE 1951.)

QUINE 1945 :

QUINE (W. v. O.). — On the logic of quantification — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 10 (1945), pp. 1-12.

QUINE 1951 :

QUINE (W. v. O.). — *Mathematical Logic*, revised edition — Cambridge, Mass. (Harvard University Press), 1951.

RASIOWA 1955 :

RASIOWA (Helena). — O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdań — *Studia Logica*, vol. 3 (1955), pp. 208-226.
(Summary : « On a fragment of the implicative propositional calculus », pp. 225-226.)

RIEGER 1949 :

RIEGER (Ladislav). — On the lattice theory of Brouwerian propositional logic — *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Carolinæ*, nº 189. F. Rivnáč, Prague, 1949, 40 pp.
(Cité d'après THOMPSON 1952.)

RIGUET 1948 :

RIGUET (J.). — Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 76 (1948), pp. 112-155.

ROBINSON 1959 :

ROBINSON (T. Thacher) — Review of PORTE 1958.*d* — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 24 (1959), pp. 68-69.

ROSENBLOOM 1950 :

ROSENBLOOM (Paul C). — *The Elements of Mathematical Logic* — New-York (Dover), 1950.

ROSE 1954 :

ROSE (Gene). — Review of CHURCH 1953 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 19, pp. 233-234.

ROSSER 1937 :

ROSSER (J. B.). — Gödel Theorems for non-constructive logics — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 2 (1937), pp. 129-137.

ROSSER 1953 :

ROSSER (J. B.). — *Logic for mathematicians* — New-York, 1953.

ROSSER-TURQUETTE 1952 :

ROSSER (J. B.) and TURQUETTE (A. R.). — *Many-valued logics* — Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1952.

SCOTT-TARSKI 1957 :

SCOTT (Dana) and TARSKI (A.). — The sentential calculus with infinitely long expressions — *Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic in 1957 at Cornell University* (Miméographié), pp. 83-89.

SIERPINSKI 1928 :

SIERPINSKI (B.). — *Leçons sur les nombres transfinis* — Paris (Gauthier-Villars), 1938.

SKOLEM 1952 :

SKOLEM (Th.). — Consideraciones sobre los fundamentos de la matemática — *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4^a ser., t. 12 (1952), pp. 169-200 et t. 13 (1953), pp. 149-174.

SLUPECKI 1953 :

SLUPECKI (Jerzy). — Ueber die Regeln des Aussagenkalküls — *Studia Logica*, vol. 1 (1953), pp. 145-236.

Suszko 1949 :

Suszko (R.). — O analitycznych aksjomatach i logicznych regulach wnioskowania — *The Poznań Society of Friends of Sciences*, Philosophal section, 7, n° 5, pp. 1-30, 1949.

(Cité par Łoś-Suszko 1958.)

Suszko 1957 :

Suszko (Roman). — Formalna teoria wartości logicznych, I — *Studia Logica*, vol. 6 (1957), pp. 145-236.

(English Summary : « A formal theory of Logical Values, I », pp. 234-236.)

Tarski 1930.*a* :

Tarski (A.). — Uber einige fundamentale Begriffe der Mathematik — *C. R. de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. 3, vol. 23 (1930), pp. 22-29.

(Cité d'après la traduction anglaise, qui est le chapitre 3 de Tarski 1956)

Tarski 1930.*b* :

Tarski (A.). — Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaffen, I — *Monatsh. für Math. u. Physik*, vol. 37 (1930), pp. 361-404.

(Cité d'après la traduction anglaise, qui est le chapitre 5 de Tarski 1956.)

Tarski 1933 :

Tarski (A.). — Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollstandigkeit — *Monatsh. für Math. und Physik*, vol. 40 (1933), pp. 97-112.

(Cité d'après la traduction anglaise qui est le chapitre 9 de Tarski 1956.)

Tarski 1933.*a* :

Tarski (A.). — Der Wahrheitsbegriff in der formalisierten Sprachen — *Studia Philosophica*, vol. 1 (1936), pp. 261-405.

(C'est la traduction allemande, augmentée d'un appendice, d'un texte publié en langue polonaise en 1933 — Cité ici d'après la traduction anglaise, qui est le chapitre 8 de Tarski 1956.)

Tarski 1938 :

Tarski (A.). — Der Aussagenkalkül und die Topologie — *Fundamenta Mathematicæ*, vol. 31 (1938), pp. 103-134.

(Cité d'après la traduction anglaise, qui est le chapitre 11 de Tarski 1956.)

Tarski 1956 :

Tarski (A.). — *Logic, Semantics, Metamathematics*, papers from 1923 to 1938 — Oxford (Clarendon Press), 1956.

THOMPSON 1952 :

THOMPSON (Frederick B.) — Review of RIEGER 1949 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 17 (1952), pp. 146-147.

TURING 1936 :

TURING (A. M.). — On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem — *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 42 (1936-1937), pp. 230-265.

TURING 1937 :

TURING (A. M.). — On computable numbers. A correction — *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, vol. 43 (1937), pp. 544-546.

VAUGHAN 1941 :

VAUGHAN (H. E.). — Review of POST 1941 — *Journal of Symbolic Logic*, vol. 6 (1941), pp. 114-115.

WAJSBERG 1932 :

WAJSBERG (Mordechaj). — Ein erweiteter Klassenkalkül — *Monatsh. für Math. und Physik*, vol. 40 (1953), pp. 113-126.

WAJSBERG 1937 :

WAJSBERG (M.). — Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting — *Wiadomości Matematyczne*, vol. 46 (1938), pp. 45-101. (Texte daté du 3 septembre 1937 — Les tirés à-part ont des pages numérotées de 1 à 57.)

WHITEHEAD-RUSSELL 1910 :

WHITEHEAD (A. N.) and RUSSELL (Bertrand) — *Principia Mathematica* — Cambridge, 1910-1913.

WHITEHEAD-RUSSELL 1925 :

WHITEHEAD (A. R.) and RUSSELL (Bertrand) — *Principia Mathematica*, 2nd edition, Cambridge, 1925-1927. (C'est une édition revue et augmentée de WHITEHEAD-RUSSELL 1910.)

WRIGHT (VON) 1951 :

WRIGHT (George H. VON) — *An essay in modal logic* — Amsterdam (North-Holland Publ. Co.), 1951.

INDEX ALPHABÉTIQUE.

(Les numéros renvoient aux pages. Les numéros en chiffres gras renvoient à des définitions.)

Abréviation, VI, 84.
Abrégé (connecteur —), 83.
Acceptable (schéma —), 36.
— (règle D- —), 35.
— (règle T- —), 35.
Adéquat, 3, 7.
Algèbre boolienne, 106.
— sous-jacente, 70.
Alphabet, 3, 7, 19, 25, 29.
Application, 16.
— semi-fonctionnelle, 16.
Antécédents (d'une règle), 19, 20.
Argument, 16.
— muet, 59.
— (fixer un —), 56.
— (dépendre d'un —), 59.
Assignations, 71.
Atomes, 16, 51.
Atomiques (formules —), 51.
Automorphismes, 31.
Autonymes (signes —), 9, 31.
Axiomatisation, 25, 29.
Axiome, 8, 19.
— (schéma d' —), 19.
Bases, 14.
Binaire (relation —), 15.
Boolienne (algèbre —), 106.
— (fonction —), 59.
Calculs implicationnels, 116.
— modaux, 5, 118.
— propositionnels, 2, 54.
— propositionnels classiques, 5, 52, 81, 97.
— propositionnels intuitionnistes, 81, 96, 115.
Caractéristique (fonction —), 15.
Caractéristique (modèle —), 72.
— (modèle D- —), 75.
— (modèle T- —), 75.
Chaîne, 15.
CIC, 116.
CII, 116.
Classes, 9, 14.
Classique (calcul propositionnel —), 52, 81, 97.
CMM, 119.
CMM_2, 121.
CMW, 119, 121.
Complet (système formel —), 72.
Compatibles (couple de traductions —), 87.
— (déductibilités —), 5.
— (équivalences —), 15.
Composition, 17.
Concaténation, 11.
— (fonctions de —), 48.
Complet, 69, 72.
Congrues (formules —), 47.
Congruence, 5, 15, 47, 63.
— (déterminée connectivement), 64.
— (déterminée pluri-connectivement), 64.
— (déterminée quasi-connectivement), 64.
— maximum, 47.
— minimum, 47.
Conjonction, 8, 98.
Connecteur, 51.
— abrégé, 83.
— défini contra-connectivement, 95.
— primitif, 83.
Connectif (système —), 2, 51.
— (schéma —), 61.
Connective (fonction —), 55.
— (fonction — génératrice), 55.
— (fonction quasi- —), 56.
— (fonction ultra- —), 60.
— (fonction contra- —), 61.

Connective (quasi-traduction contra- —), 84.
— (règle —), 61.
— (traduction contra- —), 84.
Connectivement (système — déterminé), 61.
Conséquence, 22, 28.
Conséquent, 19, 20.
Conservative (extension D- —), 44.
— (extension E- —), 44.
— (extension F- —), 44.
— (extension EF- —), 44.
— (extension T- —), 43.
— (sous-évaluante —), 78.
Consistant, 46.
Constante, 17.
Constante (fonction —), 17.
Constructives (règles non- —), 23.
Contra-connective (fonction —), 61.
— (quasi-traduction —), 84.
— (traduction —), 84.
Contra-connectivement, 95.
Contre-image homomorphe, 72.
Couple, 11.
Coupure, 37.
CPC, 97.
CPC-FL, 97.
CPC-P, 100.
CPC (NK), 103.
CPI, 115.
CPI-H, 115.
Crochets, 10, 11.
Décaler, 11.
Déductibilité, 5, 21, 24, 25-26, 30.
Déductibilité immédiate, 20.
Déductible, 20, 24.
Déductible (immédiatement —), 20.
Déduction, 20.
Déduction naturelle, 27.
Déduction (Théorème de —), 27, 39.
Déductionnel (Système —), 2, 25.
Défini (connecteur — contra-connectivement), 95.
Définie (fonction — partout), 16.
Définissable normalement (connecteur —), 66.
Définition, 8.
Définition contra-connective, 95.
Définition formelle, 5, 8, 50.
Définitionnelles (fonctions —), 50.
Degré cardinal d'extensibilité, 46.
Degré ordinal d'extensibilité, 46.
Dénoter, 9.
Dépendre complètement d'un argument, 59.
Dérivées (règles —), 37.
Désigner, 8.
Détachement, 5, 39, 40.
— (règle de —), 37, 40, 98.
Déterminée (congruence — connectivement), 5, 64.
Disjonction, 8, 98.
Distingués (éléments —), 69.
Double-implication, 7, 8, 98.
Doublet, 8, 11.
Effectivité, 23.
Égalité, 8.
— formelle, 8.
Éléments (d'une suite), 11.
Élimination (Théorème d' —), 50.
Empiéter, 12.
Engendré (système formel —), 25, 29.
Ensembles, 9.
Équipollence, 5, 83, 85.
Équivalence, 7, 15.
Équivalents (systèmes —), 33.
— (systèmes déductionnellement —), 33.
— (systèmes D- —), 33.
— (système thétiquement —), 33.
— (systèmes T- —), 33.
Évaluante, 4, 69.
— de Lindenbaum, 76, 77.
— de Lindenbaum réduite, 77.
— de Łoś, 77.
— de Łoś réduite, 110.
— pleine, 69.
— (sous- —), 77.
Évaluation (fonctions d' —), 69.
— (fonctions d' — génératrices), 69.
Exemple d'application (d'une règle), 111.
Extensions, 5, 43.
— (A- —), 44.
— (D- —), 43.
— (R- —), 44.
— (T- —), 43.
— conservatives, 43.
— D-conservatives, 44.
— E-conservatives, 43.
— EF-conservatives, 43.
— F-conservatives, 43.
— T-conservatives, 43.
Faible (déductibilité —), 5, 119.
Fermeture transitive, 15.
Fine (relation plus —), 14.
Finitude, 81.

Fonction, 16.
— boolienne, 59.
— caractéristique, 15.
— connective, 55.
— connective génératrice, 55.
— constante, 17.
— contra-connective, 61.
— de concaténation, 48.
— définitionnelle, 50.
Fonction d'évaluation, 69.
— d'évaluation génératrice, 69.
— identité, 17.
— *n*-aire, 16.
— projection, 17.
— quasi-connective, 56.
— ultra-connective, 60.
— (semi- —), 16.
Fonctionnellement complète (évaluante —), 69.
Fondement (problème du —), 2.
Formel (système —), 2, 31.
Formulations, 3, 83, 89.
Formule, 8, 19, 25, 29.
— atomique, 50.
— infiniment longue, 12, 23.
— (sous- —), 19.
Généralisation (règle de —), 123.
Génératrices (fonctions connectives —), 55.
— (fonctions d'évaluation —), 69.
Gentzen (« Théorème fondamental » de —), 37.
— (systèmes H de —), 27.
— (systèmes L de —), 27, 28.
— (systèmes N de —), 27.
Graphe, 14, 16.
Guillemets, 8.
Homologie, 71, 85.
Homologues (évaluantes —), 70.
— (fonctions —), 70.
Homomorphe (contre-image —), 72.
— (image —), 72.
Homomorphisme (d'évaluantes), 17, 72.
Identité, 8.
— (fonction —), 10, 17.
Image homomorphe, 72.
Immédiatement déductible, 20.
Implication, 7, 8, 83.
Inclusion, 9.
Indépendance, 5.
Indépendant (axiome —), 38.
— (schéma d'axiomes —), 35, 36.
Indépendante (règle D- —), 35.
— (règle T- —), 35.
Infixe, 15.
Initial (sous-mot —), 12.
Intuitionniste (calcul implicationnel —), 81, 96, 116.
— (calcul propositionnel —), 115.
Isomorphisme, 17.
$\mathfrak{L}$, 76.
$\mathfrak{L}_A$, 79.
Lindenbaum (évaluante de —), 76.
— (évaluante de — réduite), 77.
— (théorème d'extensibilité maximum de —), 45.
Logique combinatoire, 52.
— modale, 118.
Logistique (système —), 2, 19.
Longueur (d'une suite finie), 11.
Łoś (évaluante de —), 77.
— (évaluante de — réduite), 110.
$\mathfrak{M}_{CPC}$, 99.
$\mathfrak{M}_3$, 107.
Machines de Turing, 13.
Matrice, 69.
— de Lindenbaum, 77, 79.
Maximale (sous-formule —), 19.
Métamathématique, 3.
Métathéorème, 8.
Minimale (sous-formule —), 20.
Modales (fonctions —), 58-59.
— (formules —), 120.
Modaux (calculs —), 5, 118.
— (systèmes —), 58-59, 118.
Modèle, 71.
— caractéristique, 72.
— D-caractéristique, 75.
— T-caractéristique, 75.
Mot, 12, 19.
— (sous- —), 12.
Muet (argument —), 59.
Multirelation, 15.
n-aire (relation —), 14.
— (fonction —), 16.
Nécessité, 118.
Négation, 8.
Nombre ordinal, 4, 9, 23.
Non-normal (modèle —), 107.
— (modèle faiblement —), 107.
— (modèle fortement —), 107.
Notations simplifiées, 12, 54, 62.
Numérotation, 19, 25, 29.
n-uple, 11.
n-uplet, 11.
Occurrence (d'un symbole), 11.
— (d'un sous-mot), 12.

Ordinal (nombre —), 4, 9, 23.
Ordination naturelle (des relations), 14.
Ordre, 15.
— alphabétique, 31.
— partiel, 15.
— total, 15.
— (pré- —), 16.
Organique (règle —), 111.
Paire, 10.
— ordonnée, 10.
Parenthèses, 9, 54.
— formelles, 54, 97.
Parties (d'un calcul), 115.
— (d'un ensemble), 9.
— finies, 9.
Permutables (fonctions —), 56.
— (fonctions — à l'homologie près), 71, 85.
Pleine (évaluante —), 69.
Plus grand ensemble, 10.
Plus petit ensemble, 10.
Pluri-connectivement (congruence déterminée —), 64.
Poids, 52.
Points, 16, 46.
Possibilité, 118.
Postulat, 8.
Précéder (dans une suite), 11.
Prédicats (calcul des —), 34, 37, 49.
Prémisses, 20.
Primitifs (connecteurs —), 83.
Primitives (notions —), 2, 83.
— (règles —), 19.
Produit cartésien, 14.
— d'évaluantes, 80.
Projections (fonctions —), 17.
Proposition, 8.
Propositional calculi, 3.
Propositionnel (calcul — classique), 52, 81, 97.
— (calcul — intuitionniste), 81, 96, 115.
Propositionnels (calculs —), 52, 81.
Propriété, 15.
— de détachement, 39.
— de rattachement, 39.
Quanteur, 7, 8.
— existentiel, 7, 8.
— universel, 7, 8.
Quantifieur, 7.
Quantificateur, 7.
Quasi-connectives (fonctions —), 56.
Quasi-traduction contra-connective, 84.
Quine's corners, 9, 31.
$\mathcal{R}_T$, 92.
Rang, 10.
Rattachement, 39.
Récurrence (sur les formules), 55.
Récursivité, 23, 31.
Réductible (*n*- —), 79,.
Réduite (évaluante de Lindenbaum —), 77.
— (évaluante de Łoˊ —), 110.
Règle, 5, 20, 27.
— à *n* antécédents, 20.
— connective, 61.
Règle de déduction primitive, 19.
— de détachement, 5, 37, 40, 98.
— de généralisation, 34, 123.
— de substitution, 34.
— dérivée, 37.
— D-acceptable, 35.
— D-indépendante, 35.
— *n*-aire, 20.
— non constructive, 23.
— primitive, 19.
— se traduisant, 91.
— T-acceptable, 35.
— T-indépendante, 35.
Régulière (évaluante non- —), 112.
Relation, 14.
— fonctionnelle, 16.
— *n*-aire, 14.
— semi-fonctionnelle, 16.
Remplacement (Théorème de —), 48.
S 4, 119, 121.
S 4.1, 121.
S 4.2, 122.
S 5, 106, 119, 122.
S 5.1, 122.
S 5.2, 122.
Saturé (système logistique —), 46, 102.
Schéma, 20.
— connectif, 61.
— d'axiomes, 19.
— indépendant, 35.
Sémantique, 4.
Semi-fonction, 16.
Semi-fonctionnelle (application —), 16.
Semi-treillis, 16.
Sentential calculi, 3.
Séquences, 23.
Signes, 8.
— typographiques, 8.
Simples languages, 52.
Somme d'évaluantes, 80.

Sous-évaluante, 77.
— conservative, 78.
Sous-formule, 19.
Sous-jacente (algèbre —), 70.
Sous-mot, 12.
Sous-système, 121.
Structures, 2, 14, 19.
Substitutifs (systèmes connectifs —), 52.
Substitution, 17, 34, 52.
— multiple, 53.
— simple, 53.
Suite, 10.
— finie, 10.
— vide, 11.
Suivre (dans une suite), 11.
Superposition, 17.
— normale, 17.
Symboles, 8, 19, 30.
Syntaxe, 4.
Systèmes connectifs, 2, 61.
— déductionnels, 2, 25.
— formels, 2, 31.
— logistiques, 2, 19.
— modaux, 5, 118.
— thétiques, 2, 29, 31.
$\mathfrak{S}$, 75.
$\mathfrak{S}_D$, 75.
$\mathfrak{S}_T$, 75.
Tables de vérité, 69.
Termes (d'une suite), 10.
Terminal (sous-mot —), 12.
Théorème, v, 8.
— de complétude, 99.
— de déduction, 27, 39, 42.
— de Lindenbaum, 77.
— de remplacement, 48.
— d'extensibilité maximum (de Lindenbaum), 45.
— fondamental de Gentzen, 37.
Thèse, 2, 8, 20, 25, 29.
Thétique (système —), 2, 29, 31.
Traduction contra-connective, 61, 84.
— d'un schéma connectif, 90.
— d'une fonction connective, 90.
— d'une règle connective, 91.
— (quasi- — contra-connective), 84.
Treillis, 5, 15.
— complet, 15.
— (semi- —), 16.
Trivalent (calcul —), 123.
Triplet, 11.
Truth-tables, 69.
Ultra-connectives (fonctions —), 60.
Unaire (fonction —), 16.
— (relation —), 15.
Uple (*n*- —), 11.
Uplet (*n*- —), 11.
$\mathfrak{V}$, 75.
$\mathfrak{V}_D$, 75.
$\mathfrak{V}_T$, 75.
Valeurs (dans une évaluante), 69.
— (ensemble des — d'une fonction), 10, 16.
Valide (formule —), 71.
— (règle D- —), 72, 74.
— (règle T- —), 72, 74.
Variable, 17.
Variante (d'une évaluante), 78.
Vide (suite —), 11.
Φ_C, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT v

Ch. 1. — *But du travail présent* 1

1. Généralités 1
2. Fondement des mathématiques ou branche particulière des mathématiques 2
3. Mathématique ou métamathématique ? 3
4. Syntaxe et sémantique 4
5. Originalité du travail présent 4

Ch. 2. — *Vocabulaire et notations* 7

6. Généralités 7
7. Duplication des notions « logiques » 7
8. Théorie des ensembles 9
9. Paires et suites 10
10. Structures, relations, algèbre 14

Ch. 3. — *Systèmes logistiques* 19

11. Notions fondamentales 19
12. Propriétés de la déductibilité 21
13. Commentaires 23

Ch. 4. — *Systèmes déductionnels* 25

14. Notions fondamentales 25
15. Commentaires 27

Ch. 5. — *Systèmes thétiques* 29

16. Notions fondamentales 29
17. Commentaires 30

Ch. 6. — *Équivalences, acceptabilités, indépendances* 33

18. Équivalences diverses entre systèmes formels 33
19. Acceptabilités et indépendance 35

Ch. 7. — *Détachement et rattachement* 39

20. (—) 39

Ch. 8. — *Extensions, congruences, définitions formelles* 43

21. Extensions 43
22. Congruences 47
23. Définitions formelles 50

Ch. 9. — *Systèmes connectifs, fonctions connectives* 51

24. Généralités 51

Pages.

25. Fonctions connectives 54
26. Axiomatisation des systèmes connectifs 61

Ch. 10. — *Congruences des systèmes connectifs* 63
27. (—) 63

Ch. 11. — *Évaluantes et modèles* 69
28. Définitions et propriétés générales 69
29. Règles, indépendances des schémas d'axiomes et des règles ... 73
30. Congruences, évaluantes de Lindenbaum 76
31. Questions diverses 80

Ch. 12. — *Équipollence* 83
32. Généralités 83
33. Équipollences et axiomatisations 90
34. Définitions contra-connectives des connecteurs 95

Ch. 13. — *Applications : le calcul propositionnel classique* 97
35. Généralités 97
36. Autres systèmes logistiques engendrant le CPC 99
37. Les systèmes équipollents au CPC 103
38. Les modèles du CPC 106

Ch. 14. — *Applications : autres systèmes connectifs* 115
39. Le calcul propositionnel intuitionniste (CPI) 115
40. Les calculs implicationnels 116
41. Les systèmes modaux 118
42. Quelques autres systèmes 123

Références 125

Index alphabétique 139

Table des matières 145

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La mesure de Haar

Vu et approuvé :

Paris, le 12 mars 1965.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

164219-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1710.

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

164219-65

Dépôt légal, Imprimeur, 1965, n° 1710.

Imprimé en France